PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.1, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1108

Ensino de matemática para o mercado financeiro: um iPhone ou ações da Apple?

Ronie P. Dario Felippe L. Sirtoli Hugo H. Bernardelli João L. Gonçalves

Resumo

Quantificar risco e retorno de investimentos é uma ferramenta essencial para o mercado financeiro. A Teoria Moderna do Portfólio trata do assunto e não requer, ao menos em seus conceitos básicos, nada além de matemática e estatística de nível médio de ensino. Neste trabalho abordamos essa teoria com foco na Educação Financeira, de forma a auxiliar um investidor iniciante a entender e controlar sua carteira de investimentos, visando um melhor desempenho. Também propomos objetivamente sua utilização no ensino de matemática em nível médio, motivando conteúdos como proporcionalidade e percentagem, equações lineares, funções quadráticas, estatística e probabilidade através do mercado financeiro. Adicionalmente, visamos que o trabalho incentive precocemente a cultura de investimentos.

Palavras-chave: Educação Financeira; Teoria do Portfólio; investimentos; mercado financeiro

Abstract

Quantifying investment risk and return is an essential tool for the financial market. Modern Portfolio Theory addresses the issue and requires, at least in its basic concepts, nothing more than High School mathematics and statistics. In this work, we approach this theory focusing on Financial Education, aiming to help a novice investor understand and control his investment portfolio. We also objectively propose its use in mathematics teaching, motivating contents such as proportionality and percentage, linear equations, quadratic functions, statistics, and probability through the financial market. In addition, this work aims to encourage the investment culture early.

Keywords: Financial Education, Portfolio Theory, investments, financial market

1. Introdução

É notório que a população brasileira ainda carece de uma cultura de investimentos visando a construção de patrimônio e maior liberdade financeira. Basta ver o que ocorre com uma modalidade com grande potencial para esses fins, que é o investimento em ações, através da Bolsa de Valores (B3). Enquanto somente 3% dos brasileiros investem neste mercado, nos Estados Unidos esse número chega a 55% da população [21]. Naturalmente, contribuíram para tal situação as décadas de instabilidade financeira, crises econômicas e altos índices inflacionários, com evidente melhora recente a partir do Plano Real.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Outros entraves para uma mudança nesse quadro também têm sido superados. A parte operacional, por exemplo, vem sendo facilitada por bancos e corretoras através da disponibilização de aplicativos de negociação de ativos financeiros diretamente pelo celular, redução ou mesmo isenção de taxas de corretagem e ferramentas para o cálculo do imposto de renda sobre as operações.

Diversas iniciativas educacionais também estão ajudando nesse processo. A própria B3 oferece cursos gratuitos e são cada vez mais populares nas mídias sociais os canais de Educação Financeira voltados aos investimentos em ações, em renda fixa e em outras categorias de ativos. Na educação formal, destaca-se a inclusão do tema transversal de Educação Financeira no Ensino Médio, nas diretrizes da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), assim como o foco na aprendizagem através da metodologia de projetos e em itinerários formativos.

O próximo grande desafio na formação de novos investidores é o gerenciamento de uma carteira de investimentos.

Quando realizado um investimento em ações, por exemplo, é usual que se divida o capital disponível pelo número de empresas diferentes das quais se deseja comprar ações, alocando assim aproximadamente o mesmo valor em cada empresa. Ocorre que essa escolha do percentual do capital a ser investido em cada empresa pode ser feita de forma a otimizar o desempenho da carteira em relação aos níveis de retorno esperado ou de risco ao qual o investidor está disposto a assumir. A escolha de ações com retornos muito relacionados pode gerar concentração em algum setor da atividade econômica e assim e aumentar o risco.

A Teoria Moderna do Portfólio, ou simplesmente Teoria do Portfólio (TP), aborda justamente esses problemas. Ela foi iniciada ainda na década de 50 com a publicação do artigo *Portfolio Selection*, de Harry Markowitz [14]. O livro de Capinski [5] apresenta seus resultados básicos e destaca seus dois principais componentes: o retorno e o risco, seja de ativos financeiros particulares ou de carteiras de investimentos.

O retorno (ou rentabilidade) de um ativo em dado período é a variação percentual de seu preço com a possível adição de proventos, ou rendimentos. Já o seu retorno esperado leva em conta as probabilidades das diversas possibilidades de retorno, vinculadas aos cenários futuros sobre o ativo.

O risco, por sua vez, pode ser visto como o nível de incerteza em relação à rentabilidade. Ele é chamado de sistêmico quando afeta a economia de uma maneira geral, como no caso de crises financeiras, pandemias etc, e dificilmente pode ser anulado. O risco não sistêmico refere-se a uma empresa ou setor de atividade específico e pode ser minimizado através de uma diversificação adequada dos investimentos. A TP trata o risco não sistêmico, modelando-o como uma função que envolve as variâncias e correlações dos retornos esperados e está intimamente ligada à ideia de volatilidade dos preços.

A aplicação do modelo matemático produzido pela teoria leva à construção das chamadas carteiras eficientes, isto é, aquelas em que os percentuais a alocar em cada ativo minimizam o risco para um dado nível de retorno fixado, ou ainda, maximizam o retorno para um dado nível de risco fixado. O conjunto das carteiras eficientes são representadas no plano risco $\times$ retorno como os pontos da curva denominada de Fronteira Eficiente. As contribuições de Markowitz, W. Sharpe e M. Miller à Economia Financeira, que inclui a Teoria do Portfólio, mereceram o prêmio Nobel de Ciências Econômicas em 1990.

Duas aplicações da TP ao mercado acionário brasileiro foram desenvolvidas em [8, 13] e foram baseadas nas dissertações (Profmat) [9, 15], respectivamente. Foi realizado o acompanhamento da evolução de uma carteira de investimentos em ações, objetivando-se a redução do risco em um período que incluiu o auge da pandemia de Covid-19 e a obtenção de um nível mínimo de retorno. Na elaboração desses trabalhos ficou evidente também que o tema permitia aplicações diretas ao ensino de matemática e estatística, principalmente no Ensino Médio.

Neste trabalho temos dois objetivos principais. O primeiro é divulgar os conceitos e resultados básicos da TP, introduzindo de que forma podem ser considerados em situações de investimentos. O segundo, e principal, é utilizar diretamente a TP na Educação Financeira por meio da apresentação de propostas para possível utilização por educadores, com foco na construção de exemplos práticos envolvendo conteúdos elementares como proporcionalidade, percentagem, equações lineares, funções quadráticas e estatística básica.

Visamos alinhar nossa abordagem às recentes mudanças estruturais no Ensino Médio.

O Ministério da Educação (MEC) apresentou em 2021 o Novo Ensino Médio, que estabelece uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para esse nível de ensino e apresenta uma reestruturação curricular na qual passa a ser obrigatória a inclusão de itinerários formativos e projeto de vida no planejamento escolar. Paralelamente foi lançado o Programa Educação Financeira na Escola, voltado à formação de professores da educação básica e que visa a disseminação da Educação Financeira nas escolas brasileiras em cooperação com a Comissão de Valores Mobiliários (CVM).

Como consequência, a partir de 2022, todas as escolas brasileiras deveriam abordar efetivamente o assunto, seja como um tema específico dentro do ensino da matemática, como um itinerário formativo ou como um tema transversal incorporado a mais de um componente curricular.

Considerado esse contexto, as propostas apresentadas neste trabalho consistem em uma sequência estruturada de atividades, em nível de dificuldade crescente. Esperamos que possam ser utilizadas como um roteiro de estudos ou como atividades isoladas, dependendo da intenção ou necessidade, podendo servir assim de itinerário formativo ou projeto de ensino.

Em uma etapa inicial fazemos uma explanação dos elementos básicos da Teoria do Portfólio. Começamos explorando o conceito de carteira de investimentos e o cálculo do retorno considerando a adição de proventos (dividendos, em especial), o que é aderente à situações reais de investimento. Introduzimos os conceitos e resultados sobre retorno esperado e risco de investimento. Essencialmente, esse é o conteúdo da primeira seção do trabalho. Buscamos fazê-lo da forma mais intuitiva e acessível possível, podendo assim ser uma primeira referência também aos interessados em suas aplicações práticas no mercado, ao envolver cálculos elementares de risco e retorno. Cabe citar que uma efetiva utilização da TP no mercado financeiro demanda análise de dados, aspectos computacionais e econometria [3, 8, 12, 13]. São temas que, evidentemente, fogem do escopo deste trabalho.

Na Seção 3 apresentamos as propostas de atividades. A primeira é uma introdução e contextualização sobre o mercado de ações e visa servir de base para uma apresentação destes temas aos estudantes. Já na segunda atividade (Proposta 2) utilizamos equações lineares em duas variáveis para resolver um problema de alocação de recursos em uma carteira de investimentos. Proporcionalidade e percentagem são abordados na Proposta 3, especificamente na definição do percentual do capital a ser investido em cada ativo de uma carteira.

Problemas envolvendo retorno e retorno esperado são apresentados nas Propostas 4 e 5, respectivamente. Na Proposta 6 abordamos problemas envolvendo risco de investimentos e utilizamos funções quadráticas para estudar a minimização do risco de uma carteira com dois ativos.

Este trabalho é baseado na dissertação [19]. **Nossos fins são meramente educativos e não repre-**

sentam qualquer indicação de investimento, em especial, no mercado de renda variável, o qual é considerado de alto risco e pode ocorrer perda do capital investido.

2. Teoria Moderna do Portfólio

Nesta seção apresentamos os conceitos e resultados básicos da Teoria do Portfólio (TP), em abordagem semelhante à de Capinski [5].

Na primeira subseção exploramos o conceito de carteiras de investimentos. Na sequência abordamos as definições de retorno, retorno esperado e risco, bem como outros resultados pertinentes.

Os intervalos de tempo considerados são discretos, os preços são números estritamente positivos, expressos em reais e centavos de reais, e as quantidades de títulos são números inteiros não negativos. Isso exclui, por exemplo, operações vendidas em ações (vendas a descoberto) e opções sobre ações. Também não vamos considerar custos das operações financeiras, impostos, ajustes pela inflação ou pela cotação de diferentes moedas. Uma referência para todos esses casos é [4].

2.1. Carteiras de investimentos

Uma carteira (ou portfólio) de investimentos pode ser vista como um conjunto de ativos financeiros detidos por um investidor. A definição formal é tratada à frente (3).

No livro intitulado *Pai Rico, Pai Pobre*, escrito por Robert T. Kiyosaki e Sharon Lechter [11], os autores afirmam que um ativo é tudo o que pode gerar renda a quem o possui, enquanto um passivo refere-se ao que gera despesa. Dentro da ampla definição de ativos, destacam-se os **ativos financeiros**, que são direitos econômicos tendo valor definido contratualmente.

Por exemplo, quando se empresta dinheiro para o governo brasileiro, o ativo adquirido é um título de renda fixa, vendido pelo Tesouro Direto, e a renda será gerada na forma de juros contratados de acordo com a modalidade do título. No caso do Tesouro Selic, a remuneração corresponde à taxa básica de juros da economia (Selic), definida pelo Banco Central do Brasil. Cabe citar que por oferecer liquidez (acesso aos recursos) diariamente, esse título é bastante utilizado como reserva de emergência, isto é, aquele montante equivalente a alguns meses de receita e que deve ser reservado para situações emergenciais que demandem acesso imediato aos recursos.

Na categoria de ativos financeiros de renda variável, destacamos as ações e os fundos imobiliários.

Uma ação é um título financeiro que representa a menor parte do capital social de uma empresa. Assim, na prática, o detentor de uma ação é um sócio da empresa. A bolsa de valores é um mercado onde ocorrem negociações (compra, venda etc) de ações de empresas de capital aberto. Ações de empresas brasileiras são negociadas na B3 – antiga Bovespa – por meio de códigos (*tickers*) em sua maioria compostos por quatro letras, que identificam a empresa, e um número, que representa o tipo da ação (preferencial ou ordinária). Por exemplo, as ações do Banco Itaú S.A. são negociadas na B3 sob os códigos ITUB4 e ITUB3. Os acionistas podem receber renda correspondente à distribuição de dividendos, que correspondem a parte dos lucros gerados pela empresa. Veja a Subseção 3.1 para mais detalhes sobre a Bolsa de Valores.

Fundos imobiliários são fundos que investem em empreendimentos imobiliários e que podem gerar renda com o aluguel dos imóveis. Suas cotas também são negociados na B3 e identificadas em sua maioria por meio de *tickers* compostos por quatro letras e o número 11.

Além da geração de renda, o valor de mercado é outro fator relevante para ativos, sendo que a possível valorização ao longo do tempo também deve ser considerada na caracterização de ativos.

Por exemplo, ouro e criptomoedas podem não retornar valores mensais, mas podem se valorizar com o passar do tempo. Dessa forma, também os trataremos como ativos financeiros.

Para definir formalmente uma carteira de investimentos, vamos supor que sejam adquiridos ativos financeiros numerados por $1, \ldots, n$. Denotamos por

- $P_1(0), \ldots, P_n(0)$ os respectivos **preços** pagos por cada ativo e por
- $\alpha_1(0), \ldots, \alpha_n(0)$ as respectivas **quantidades** adquiridas de cada ativo.

Logo, o valor investido no ativo i é $\alpha_i(0)P_i(0)$, para $i = 1, \ldots, n$ e o **valor total** no tempo 0 é

$$V(0) := \alpha_1(0)P_1(0) + \ldots + \alpha_n(0)P_n(0). \tag{1}$$

Dessa forma, sendo $x_i(0)$ o percentual do capital inicial alocado no ativo i, temos que

$$x_i(0) = \frac{\alpha_i(0)P_i(0)}{V(0)}, \tag{2}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Esse percentual é chamado de **peso** do ativo i na carteira. Finalmente, a **carteira de investimentos** composta por esses ativos é denotada por $X(0)$ e definida como o vetor dos pesos

$$X(0) = (x_1(0), ..., x_n(0)). \tag{3}$$

Note que $x_1(0) + ... + x_n(0) = 1$, isto é, o valor total da carteira representa o valor investido.

Exemplo 1. Para formar uma carteira de investimentos em ações, um investidor comprou 300 ações de Petrobras S.A, *ticker* PETR4, ao preço de R$ 27,54 cada, 200 ações do Banco Itaú (ITUB4), ao preço unitário de R$ 23,90 e 800 ações da fabricante de ônibus Marcopolo (POMO4), a R$ 2,62 cada. Vamos numerar esses ativos por 1, 2 e 3, respectivamente. Da Equação 1, temos que

$$V(0) = 300 \cdot 27{,}54 + 200 \cdot 23{,}90 + 800 \cdot 2{,}62 = \text{R\$ } 15.138{,}00$$

é o valor total da carteira, e, conforme (2), os pesos são

$$x_1(0) = \frac{300 \cdot 27{,}54}{15.138{,}00} \approx 54{,}58\%, \quad x_2(0) = \frac{200 \cdot 23{,}90}{15.138{,}00} \approx 31{,}58\% \text{ e } x_3(0) = \frac{800 \cdot 2{,}62}{15.138{,}00} \approx 13{,}84\%.$$

Portanto, a carteira é $X(0) = (0{,}5458\ 0{,}3158\ 0{,}1384)$.

Outro exemplo de carteira (teórica, neste caso) é o próprio Índice Bovespa (Ibovespa), que é composto pelas ações das empresas mais representativas do mercado brasileiro.

Por exemplo, em 30 de agosto de 2022, a companhia Vale do Rio Doce (VALE3) possuía o maior peso na carteira, de $12,474\%$. Quando uma notícia diz que a bolsa subiu 5%, isso significa que essa carteira teórica valorizou-se 5%. O índice serve principalmente como referencial de desempenho do mercado (*benchmark*). Por exemplo, é esperado que as carteiras de ações de fundos de investimento e de previdência igualem ou superem o rendimento do Ibovespa.

Carteiras de investimentos são dinâmicas. O valor total e os pesos dos ativos mudam conforme a variação natural dos preços de mercado. As movimentações financeiras, tais como compra ou venda de ativos e pagamento de proventos, também produzem alterações na carteira.

Os proventos podem representar dividendos, no caso de ações; juros, no caso de alguns títulos da dívida pública; ou, ainda, aluguéis de imóveis administrados por fundos imobiliários. Tais valores são depositados na conta corrente da corretora onde o investidor possui seus ativos. Uma questão importante na evolução da carteira de investimentos é a decisão do que fazer com os proventos recebidos. Se retirados da conta, é claro que as quantidades dos ativos da carteira não se alteram. Eles também podem ser reinvestidos, que é a hipótese que vamos assumir na sequência.

Marcado um intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 1$, vejamos como atualizar os pesos da carteira no tempo 1 de acordo com a variação dos preços dos ativos, recebimento de proventos e movimentações a partir da carteira inicial $X(0)$.

Seja $D_i(1)$ o montante de **proventos** pagos (por unidade) do ativo i contabilizados em $t = 1$ e seja $F_i(1)$ o valor de um **aporte** (depósito) destinado à compra de certa quantidade do mesmo ativo. Supondo que $D_i(1)$ foi reinvestido no próprio ativo i, a nova quantidade de i será dada por

$$\alpha_i(1) = \alpha_i(0) + \left\lfloor \frac{\alpha_i(0)D_i(1) + F_i(1)}{P_i(1)} \right\rfloor \tag{4}$$

onde $P_i(1)$ é o **preço** (cotação de mercado) do ativo i no tempo 1. Na segunda parcela tomamos o menor inteiro devido ao fato de não ser possível, no mercado brasileiro, comprar uma fração de uma ação, ao contrário do que ocorre no mercado norte-americano. Veja [7] para uma abordagem relacionada a este problema utilizando equações diofantinas lineares.

Se em vez de um aporte, considerarmos uma retirada $H_i(1)$ (valor negativo) proveniente da venda de unidades de i e não considerarmos proventos, então $\alpha_i(1) = \alpha_i(0) + \dfrac{H_i(1)}{P_i(1)}$, desde que $\alpha_i(1) \geq 0$.

Passando para o contexto geral, considere a **carteira de investimentos** $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ no tempo $t \geq 1$. O **peso** $x_i(t)$ do ativo i é dado por

$$x_i(t) = \frac{\alpha_i(t)P_i(t)}{V(t)}, \text{ com } \alpha_i(t) = \alpha_i(t-1) + \left\lfloor \frac{\alpha_i(t-1)D_i(t) + F_i(t)}{P_i(t)} \right\rfloor \tag{5}$$

no caso de reinvestimento de proventos. Aqui, $P_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $F_i(t)$ e $D_i(t)$ representam preço, quantidade, aporte e proventos de i no tempo t, respectivamente, e o **valor total** de $X(t)$ é

$$V(t) = \alpha_1(t)P_1(t) + \ldots + \alpha_n(t)P_n(t). \tag{6}$$

Exemplo 2. Vamos considerar a evolução da carteira do Exemplo 1 após o período de um mês, quando o investidor conseguiu poupar R$ 1.500,00 de seu salário e destinar este valor para comprar mais 500 ações POMO4, agora cotada a R$ 3,00. A empresa Petrobras pagou dividendos no valor de R$ 1,51 por ação, os quais foram reinvestidos em PETR4, que agora está cotada a R$ 26,62. As ações do Banco Itaú fecharam no mesmo valor e a quantidade de ações ITUB4 na carteira seguiu a mesma, isto é, $\alpha_2(0) = \alpha_2(1) = 200$. Para as outras quantidades, de acordo com (4), temos

$$\alpha_1(1) = 300 + \left\lfloor \frac{300 \cdot 1,51}{26,62} \right\rfloor = 317 \quad \text{e} \quad \alpha_3(1) = 800 + \frac{1.500}{3} = 1.300.$$

Dessa forma, o valor atual da carteira e os novos pesos são, respectivamente,

$$V(1) = 317 \cdot 26{,}62 + 200 \cdot 23{,}90 + 1.300 \cdot 3{,}00 = \text{R\$ } 17.118{,}54$$

$$x_1(1) = \frac{317 \cdot 26{,}62}{17.118{,}54} \approx 49{,}30\%, \quad x_2(1) = \frac{200 \cdot 23{,}90}{17.118{,}54} \approx 27{,}92\% \ \text{ e } \ x_3(1) = \frac{1300 \cdot 3{,}00}{17.118{,}54} \approx 22{,}78\%.$$

Portanto, $X(1) = (0{,}4930;\ 0{,}2792;\ 0{,}2278)$.

2.2. Retorno de ativos financeiros

Uma vez formada uma carteira de investimentos, torna-se indispensável acompanhar sua rentabilidade regularmente ao longo do tempo. Isso permite comparar o desempenho com outras carteiras e reavaliar regularmente sua composição.

Há mais de uma maneira de fazer cálculos de rentabilidade. Essencialmente, a medição pode ser feita via Taxa Interna de Retorno (TIR), também tratada como taxa de retorno ponderado pelo dinheiro [4, 6] ou marcando as movimentações de caixa (retorno ponderado no tempo). A segunda forma é a mais utilizada e será a que adotaremos. Outra razão para isso é que a TIR demanda calcular raízes reais de polinômios, que sequer podem existir [6].

O caso mais simples é de um único investimento em um período também único, no qual calcula-se a variação percentual de preço, considerados os proventos.

Assim, o **retorno do ativo** i, do tempo t ao tempo $t+1$, é definido por

$$R_i(t, t+1) = \frac{V_i(t+1) - P_i(t)}{P_i(t)}, \tag{7}$$

onde $V_i(0) = P_i(0)$ e

$$V_i(t) = P_i(t) + D_i(t), \ \text{ para } t \geq 1, \tag{8}$$

ou seja, é o preço do ativo i no tempo t somado com o valor $D_i(t)$ dos proventos contabilizados no tempo t. Note que o retorno é definido com base na expressão da capitalização composta (discreta) de um período único, pois $V_i(t+1) = P_i(t)(1 + R_i(t+1))$.

Agora supomos que o ativo i tenha sido adquirido no tempo $t = 0$ e mantido até o tempo $t = m$, sendo este intervalo discreto de tempo dividido em subintervalos de t a $t+1$, para $t = 0, \ldots, m-1$. Definimos o **retorno** de i no período de $t = 0$ a $t = m$ como

$$R_i(0, m) = \left(\frac{V_i(1)}{P_i(0)} \cdot \frac{V_i(2)}{P_i(1)} \cdot \ldots \cdot \frac{V_i(m)}{P_i(m-1)} \right) - 1, \tag{9}$$

o qual também pode ser expresso em termos dos retornos de cada subperíodo, conforme segue.

Proposição 1. *Mantida a notação acima, temos*

$$R_i(0, m) = \Big(1 + R_i(0,1)\Big)\Big(1 + R_i(1,2)\Big) \ldots \Big(1 + R_i(m-1, m)\Big) - 1.$$

Demonstração. Basta utilizar indução sobre m. Alternativamente, observando que

$$\frac{V_i(k)}{P_i(k-1)} = \frac{P_i(k) + D_i(k)}{P_i(k-1)} = \frac{P_i(k) + D_i(k) - P_i(k-1)}{P_i(k-1)} + 1 = 1 + R_i(k-1, k),$$

é suficiente comparar os fatores correspondentes de (9) e do enunciado, para $k = 1, \dots, m$. □

Exemplo 3. Suponha que em 18 de maio de 2022 tenha sido realizado um investimento no fundo imobiliário Vinci FII, que possui participação em *shoppings* no Brasil e é negociado na B3 sob o código VISC11. O valor pago por cota foi de R\$ 100,00. Mensalmente o fundo paga aos cotistas os valores referentes a aluguéis. Foram pagos R\$ 0,70 por cota em 14 de junho e em 14 de julho, e ainda R\$ 0,71 em 12 de agosto de 2022. A cotação de VISC11 era de R\$ 101,10 em 17 de junho, R\$ 100,01 em 18 de julho e R\$ 107,97 em 18 de agosto. Dessa forma, o retorno do ativo, calculado mensalmente utilizando (7) foi de

$$R_1(0,2) = \left(\frac{101{,}10 + 0{,}70}{100{,}00}\right)\left(\frac{100{,}01 + 0{,}70}{101{,}10}\right)\left(\frac{107{,}97 + 0{,}71}{100{,}01}\right) - 1 \approx 10{,}20\%.$$

Alternativamente, pela Proposição 1, tem-se

$$R_1(0,2) = \left(1 + \frac{101{,}1 + 0{,}7 - 100}{100}\right)\left(1 + \frac{100,01 + 0{,}7 - 101{,}1}{101{,}1}\right)\left(1 + \frac{107{,}97 + 0{,}71 - 100{,}01}{100{,}01}\right) - 1 \approx 10{,}20\%.$$

Utilizando o conceito de retorno de ativos, definimos agora o **retorno da carteira** de investimentos $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ no período de $t-1$ a t, com $t = 1, \dots, m$, como

$$R(t-1,t) = x_1(t-1)R_1(t-1,t) + \ldots + x_n(t-1)R_n(t-1,t). \tag{10}$$

A proposição a seguir apresenta uma forma alternativa para (10), levando em conta a quantidade $\alpha_i(t)$ do ativo i no tempo t (5) e o valor total da carteira $V(t)$ (6). Não são considerados aportes, isto é, assume-se $F_i(t) = 0$ em (5). Ainda em (5), considera-se inteiro o número $\alpha_i(t-1)D_i(t)/P_i(t)$.

Proposição 2. *Nas condições acima, o retorno da carteira* $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ *no período de tempo de* $t-1$ *a* t *é dado por*

$$R(t-1,t) = \frac{V(t) - V(t-1)}{V(t-1)}, \quad \textit{para} \quad t \geq 1. \tag{11}$$

Demonstração Substituindo as expressões para $x_i(t-1)$ (5) e para $R_i(t)$ (7) em (10), segue que

$$\begin{aligned}
R(t-1,t) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i(t-1)P_i(t-1)}{V(t-1)}\right)\left(\frac{V_i(t) - P_i(t-1)}{P_i(t-1)}\right) \\
&= \frac{1}{V(t-1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t-1)\Big(P_i(t) + D_i(t)\Big) - \alpha_i(t-1)P_i(t-1) && \text{(por 8)} \\
&= \frac{1}{V(t-1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)P_i(t) - \alpha_i(t-1)P_i(t-1) && \text{(por 5)} \\
&= \frac{V(t) - V(t-1)}{V(t-1)}. && \text{(por 6)}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. Após 1 ano, as ações PETR4 adquiridas pelo investidor do Exemplo 1 subiram bastante, e agora estão cotadas a R\$ 31,43. As ações ITUB4 ficaram quase estáveis e estão R\$ 24,00. Já a cotação de POMO4 caiu para R\$ 2,31. O Banco Itaú ainda pagou aos seus acionistas dividendos de R\$ 0,12 por ação no final do período. Dessa forma, os retornos dos ativos foram

$$R_1 = \frac{31{,}43 - 27{,}54}{27{,}54} \approx 14{,}12\%, \quad R_2 = \frac{24{,}00 - 23{,}90 + 0{,}12}{23{,}90} \approx 0{,}92\% \quad \text{e} \quad R_3 = \frac{2{,}31 - 2{,}62}{2{,}62} \approx -11{,}83\%.$$

A carteira inicial era $X(0) = (0{,}5458\ 0{,}3158\ 0{,}1384)$. Portanto, o retorno da carteira no período foi

$$R(0,1) = 0{,}5458 \cdot 0{,}1412 + 0{,}3158 \cdot 0{,}0092 + 0{,}1384(-0{,}1183) \approx 6{,}36\%.$$

Alternativamente, pela Proposição 2, temos

$$R(0,1) = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \frac{(300 \cdot 31{,}43 + 201 \cdot 24{,}00 + 800 \cdot 2{,}31) - 15.138}{15.138} \approx 6{,}36\%.$$

Por serem relativas aos ativos da carteira, as definições de retorno (7) e (10) não precisam levar em conta aportes ou retiradas, que podem ser considerados fluxos de caixa externos à carteira.

Já o cálculo do retorno ponderado no tempo, que descreveremos agora, produz fórmulas gerais que incluem essas movimentações.

Considere o investimento de um montante inicial M_0 mantido do tempo $t = 0$ até o tempo $t = k$, sendo esse intervalo dividido em k subperíodos de t_{i-i} a t_i, para $i = 1, \dots, k$. Suponha que $t_1, \dots, t_{k-1}$ são escolhidos como os momentos em que ocorrem as movimentações financeiras (fluxos de caixa) cujos valores são denotados por $L_1, \dots, L_{k-1}$, respectivamente. É importante destacar que tais momentos não precisam ser igualmente espaçados. Assuma que cada L_i tem sinal positivo para aporte e negativo para retirada. Finalmente, seja M_i o valor do investimento antes de L_i, para $i = 1, \dots, k-1$, e M_k o valor do investimento ao final do período.

O **retorno ponderado no tempo** é denotado por $\mathcal{R}(0,k)$ e definido como

$$\mathcal{R}(0,k) = \left(\frac{M_1}{M_0} \cdot \frac{M_2}{M_1 + L_1} \cdot \ldots \cdot \frac{M_k}{M_{k-1} + L_{k-1}}\right) - 1 \tag{12}$$

Exemplo 5. Vejamos o retorno de um investimento inicial de R\$ 10.000,00. Suponha que ao final do primeiro mês, o valor era de R\$ 10.165,00, sendo que, desse valor, R\$ 45,00 referia-se a proventos recebidos, os quais não foram reinvestidos. Findado o segundo mês, o valor do investimento era de R\$ 9.150,00 e foi feito um aporte de R\$ 732,00. Ao findar o terceiro mês, o valor atualizado era de R\$ 12.000,00. Temos

$$\mathcal{R}(0,3) = \frac{10.165}{10.000} \cdot \frac{9.150}{10.165 - 45} \cdot \frac{12.000}{9.150 + 732} - 1 \approx 1{,}0165 \cdot 0{,}9042 \cdot 1{,}2143 - 1 \approx 11{,}61\%.$$

Se os proventos fossem reinvestidos, não iríamos subtrair o valor R\$ 45,00 do denominador do segundo fator.

Podemos considerar o ativo ou carteira referente ao investimento e utilizar as fórmulas de retorno (7) e (9). Para isso, suponha que o investimento inicial foi em 500 unidades do ativo i ao valor unitário de R\$ 20,00. Dessa forma, os proventos de R\$ 45,00 correspondem ao valor unitário de R\$ 0,09. Temos ainda que a cotação do ativo era de R\$ 20,24 ao final do primeiro mês e de R\$ 18,30 ao final do segundo, quando foram adquiridas mais 40 unidades, totalizando o reinvestimento de R\$ 732,00. Finalmente, ao final do período, a cotação era de R\$ 22,22. De acordo com (9), temos que o retorno do ativo i no período foi de

$$R_i(0,3) = \left(\frac{20{,}24 + 0{,}09}{20}\right) \cdot \frac{18{,}30}{20{,}24} \cdot \frac{22{,}22}{18{,}30} - 1 \approx 11{,}61\%.$$

Cada fator no produto em (12) corresponde ao retorno $\mathcal{R}(\mathrm{i}-1,\mathrm{i})$ relativo ao subperíodo de t_{i-1} a t_i somado com 1, para $i = 1, \ldots, k$. De fato, o investimento inicial agora corresponde a $M_{i-1} + L_{i-1}$ e o valor final é M_i, sendo $L_0 = 0$. Assim,

$$\mathcal{R}(i-1,i) = \frac{M_i}{M_{i-1} + L_{i-1}} - 1. \tag{13}$$

Obtemos assim uma proposição análoga à Proposição 1.

Proposição 3. *Nas notações de (12) e (13), tem-se*

$$\mathcal{R}(0,k) = \Big(1 + \mathcal{R}_i(0,1)\Big)\Big(1 + \mathcal{R}_i(1,2)\Big)\ldots\Big(1 + \mathcal{R}_i(k-1,k)\Big) - 1.$$

2.3. Retorno esperado

Nesta subseção continuamos com os cálculos de retorno de ativos financeiros considerando adicionalmente cenários futuros de preços, associados às suas respectivas probabilidades de ocorrência, de forma a definir o retorno esperado de um ativo com base no conceito estatístico de valor esperado.

A metodologia de Análise de Cenários faz parte da Modelagem Financeira [2], que também utiliza o modelo de fluxo de caixa descontado [18].

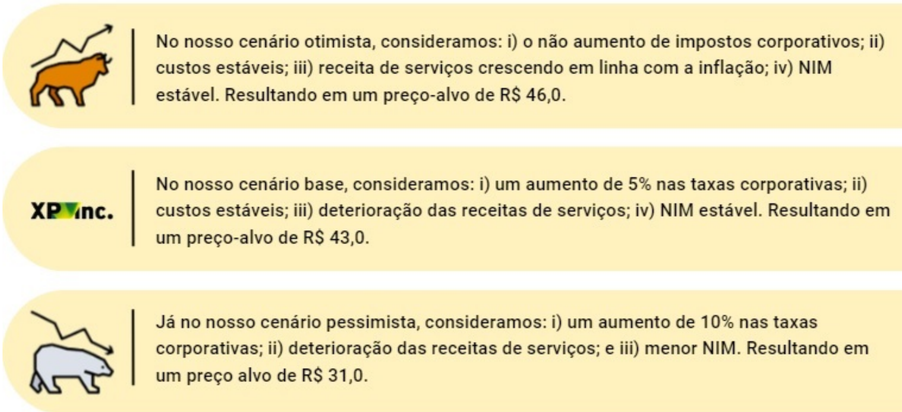
Um primeiro passo é estabelecer o cenário base para um ativo. Forma-se um conjunto de hipóteses conservadoras, tendo como referência principal a situação atual, que com o decorrer do tempo devem levar ao resultado mais realista.

Além das hipóteses sobre o ativo em si, podem ser considerados outros fatores ligados à situação econômica do país, ao estágio no ciclo econômico, entre outros.

Na sequência, traçam-se as variações do cenário base. Tipicamente, são considerados apenas dois outros cenários: o otimista e o pessimista. Eles correspondem, respectivamente, às condições ideais de resultado ou à imposição de hipóteses mais severas sobre o ativo.

Exemplo 6. Em 14 de julho de 2021, a corretora XP publicou em seu *site* suas perspectivas para os preços das ações de Banco do Brasil (BBAS3), conforme a Figura 1

Figura 1: Cenários para as ações de Banco do Brasil



Fonte: https://conteudos.xpi.com.br/acoes/bbas3. Acesso em 14/06/2021.

O próximo passo é calcular os retornos correspondentes aos possíveis cenários, utilizando as mesmas fórmulas (7) e (10) consideradas anteriormente.

Exemplo 7. Considerando que o preço de fechamento de BBAS3 em 13 de julho de 2021 foi de R$ 32,46, de acordo com os cenários do Exemplo 6, teríamos os seguintes retornos

Tabela 1: Possíveis retornos para BBAS3.

Cenário	P(0)	P(1)	Retorno
otimista	32,46	46,00	41,71%
base	32,46	43,00	32,47%
pessimista	32,46	31,00	$-4,50\%$

Finalmente, para chegarmos ao conceito de retorno esperado, basta atribuir a probabilidade de cada cenário e fazer a soma ponderada. Para melhor explicar isso, precisamos de uma primeira incursão pela probabilidade/estatística, que também nos será útil a frente.

Para um tempo futuro t, o preço $P_i(t)$ e o retorno $R_i(t)$ do ativo i são exemplos de **variáveis aleatórias finitas**. Trata-se de variáveis cujos valores dependem de fatores aleatórios e pertencem a um conjunto finito. Veja [16] para um tratamento do assunto com maior formalidade.

Por exemplo, o resultado do lançamento de um dado é uma variável aleatória finita. São conhecidos os possíveis valores, isto é, os números de 1 a 6. Contudo, o valor propriamente dito tem uma probabilidade de $1/6 \approx 17\%$ de ocorrer.

Considere a variável aleatória finita R, cujos possíveis valores encontram-se no conjunto $I = \{n_1, \ldots, n_k\}$. A cada valor n_i corresponde a probabilidade $p(n_i) \geq 0$ de ocorrer $R = n_i$, sendo que $p(n_1) + \ldots + p(n_k) = 1$.

Dessa forma, o **valor esperado** (ou esperança) de R é denotado por E(R) e definido por

$$E(R) = \sum_{i=1}^{k} n_i p(n_i). \tag{14}$$

No exemplo do lançamento de um dado, o valor esperado é $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 1/6 = 3{,}5$.

De volta ao contexto financeiro, se $n_1, \ldots, n_k$ são os possíveis retornos futuros de um ativo i e $p(n_i)$, $i = 1, \ldots, k$ são suas respectivas probabilidades, então o **retorno esperado** R_i é dado por (14), bastando trocar R por R_i:

$$E(R_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i(n_i). \tag{15}$$

Exemplo 8. Suponha que o preço atual da ação do Banco Itaú (ITUB4) é de R$ 28,15. Otimista com o desempenho do setor bancário na bolsa, um investidor elaborou a tabela abaixo.

Tabela 2: Estimativas para os retornos de ITUB4.

Cenário	Probabilidade	P(0)	P(1)	Retorno
bull market	60%	28,15	33,78	20%
slow market	25%	28,15	29,56	5%
bear market	15%	28,15	25,34	–10%

Assim, o retorno esperado de ITUB4 para o período seria de

$$0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}15(-0{,}1) \approx 11{,}75\%.$$

Vamos agora estender a noção de retorno esperado para uma carteira de investimentos. Para isso, precisamos da linearidade do valor esperado, conforme a Proposição 4.

Proposição 4. *Se* R *e* S *são variáveis aleatórias finitas e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então* $E(\alpha R + S) = \alpha E(R) + E(S)$.

Demonstração. Sejam $(r_i)_{i\in I}$, $I = \{r_1, \ldots, r_k\}$, os possíveis valores para R e $(s_j)_{j\in J}$, $J = \{s_1, \ldots, s_k\}$, os possíveis valores para S. Seja ainda $p(r_i, s_j)$ a probabilidade (conjunta) de ocorrer $R = r_i$ e $S = s_j$. Note que $p(r_i) = \sum_{j=1}^{k} p(r_i, s_j)$. Assim, $E(\alpha R + S) = \sum_{i,j=1}^{k} (\alpha r_i + s_j)p(r_i, s_j) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha r_i p(r_i, s_j) + \sum_{i,j=1}^{k} s_j p(r_i, s_j) = \alpha E(R) + E(S)$. □

Utilizando a Proposição 4, definimos o **retorno esperado da carteira** $X = (x_1, \ldots, x_n)$, denotado por E(R), como combinação linear dos retornos esperados dos ativos, isto é,

$$E(R) = x_1 E(R_1) + \ldots + x_n E(R_n). \tag{16}$$

Exemplo 9. Considere uma carteira $X = (x_1, x_2)$ com 30% do capital alocado em BBAS3 e 70% em ITUB4, com preços iniciais e probabilidades de acordo com os Exemplos 7 e 8:

Tabela 3: Possibilidades de preços para os ativos da carteira X.

Cenário	Probabilidades	Banco do Brasil		Banco Itaú	
		P(0)	P(1)	P(0)	P(1)
1	60%	32,46	46,00	28,15	33,78
2	25%	32,46	43,00	28,15	29,56
3	15%	32,46	31,00	28,15	25,34

Do Exemplo 8 temos que $\mathrm{E(R_2)} = 11,75\%$. Da mesma forma, obtêm-se $\mathrm{E(R_1)} = 32,47\%$. Assim,

$$\mathrm{E(R)} = 0{,}3\mathrm{E(R_1)} + 0{,}7\mathrm{E(R_2)} = 0{,}3 \cdot 0{,}3247 + 0{,}7 \cdot 0{,}1175 \approx 17{,}97\%.$$

2.4. Risco de investimentos

É natural associarmos o risco de um investimento ao nível de incerteza do retorno financeiro.

Por exemplo, um título de renda fixa emitido pelo governo americano, com remuneração pré-fixada e mantido até o vencimento, é tido pelo mercado financeiro como um investimento livre de risco, no sentido que o retorno será muito provavelmente o retorno esperado (pré-fixado).

É claro que a situação pode ser bem diferente para outros investimentos. Para exemplificar, vamos supor que o retorno de um título livre de risco seja de 10% e vamos chamá-lo de investimento 1.

Considere também outros dois investimentos (2 e 3), agora com retornos dependendo de dois cenários possíveis. No investimento 2, o retorno é de 9% ou de 11%, com iguais probabilidades para cada cenário. Já os cenários para o terceiro investimento possuem retorno de 1% ou 16%, com probabilidades de 40% e de 60%, respectivamente.

Note que o retorno esperado é o mesmo para os três investimentos. De fato, por (15), temos

$$0{,}5 \cdot 0{,}09 + 0{,}5 \cdot 0{,}11 = 10\% = 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}6 \cdot 0{,}16.$$

Contudo, o risco do terceiro investimento é bem maior que o do segundo, pois a incerteza sobre o retorno é maior. Já o risco do segundo investimento está entre o risco do primeiro e do terceiro.

Dessa forma, é natural que uma medida de risco leve em conta as probabilidades de cada retorno possível e a distância entre os valores desses retornos e o valor esperado (linhas em vermelho, azul e verde na Figura 2). Os cenários para cada ativo serão chamados de ω_1 e ω_2.

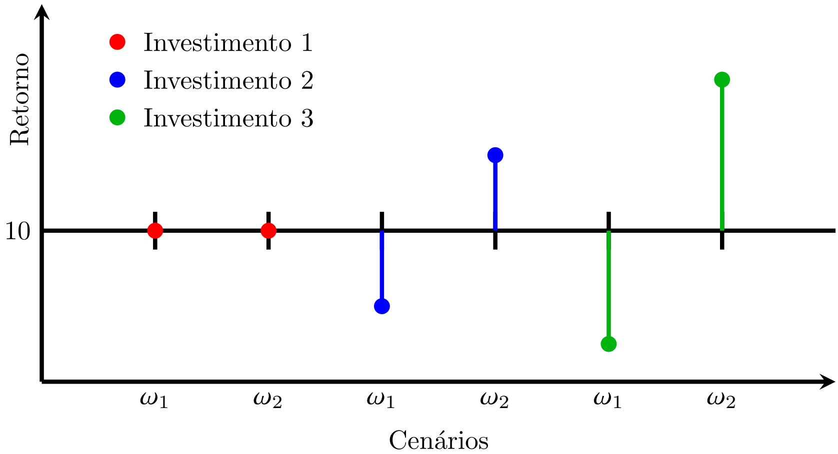
Este exemplo ilustra a motivação para a Teoria Moderna do Portfólio tratar o risco como o desvio padrão, isto é, a raiz quadrada da soma dos quadrados das distâncias dos valores dos retornos possíveis ao retorno esperado, ponderadas pelas respectivas probabilidades.

Formalmente, o **desvio padrão** da variável aleatória finita R, em relação ao seu retorno esperado E(R) (14), é denotado por σ_R e definido como a raiz quadrada da **variância** de R, que por sua vez é denotada por Var(R) ou σ^2_R, e dada por

$$\sigma^2_\mathrm{R} = \mathrm{Var(R)} = \mathrm{E}\left[(\mathrm{R} - \mathrm{E(R)})^2\right] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{p_i(n_i)(n_i - E(R))^2}, \tag{17}$$

onde $\mathrm{n_1}, \ldots, \mathrm{n_k}$ são os possíveis valores de R e $\mathrm{p(n_1)}, \ldots, \mathrm{p(n_k)}$ suas respectivas probabilidades.

Figura 2: Ilustração do risco de três investimentos



Dessa forma, o **risco de um ativo** i é definido como o seu desvio padrão em relação ao seu retorno esperado $E(R_i)$ (veja 15), ou seja,

$$\sigma_i = \sqrt{Var(R_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_i(n_i)(n_i - E(R_i))^2}. \tag{18}$$

No nosso exemplo, os riscos dos investimentos 2 e 3 são, respectivamente,

$$\sqrt{0{,}5(0{,}09-0{,}1)^2+0{,}5(0{,}11-0{,}1)^2} = 1\% \text{ e } \sqrt{0{,}4(0{,}01-0{,}1)^2+0{,}6(0{,}16-0{,}1)^2} = 7{,}35\%.$$

Exemplo 10. Vamos calcular o risco do investimento no Banco Itaú, conforme o Exemplo 8, para o retorno esperado de $E(R) = 11{,}75\%$. Temos $\sigma^2 = Var(R) =$

$$= E\Big((R-0{,}1175)^2\Big) = 0{,}6(0{,}20-0{,}1175)^2 + 0{,}25(0{,}05-0{,}1175)^2 + 0{,}15(-0{,}10-0{,}1175)^2 \approx 0{,}0123.$$

Segue que o risco é $\sigma = \sqrt{Var(R)} \approx 0{,}1109 = 11{,}09\%$.

A variância de uma variável aleatória finita Y também pode ser expressa como

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2. \tag{19}$$

De fato, pela Proposição 4, temos

$$Var(Y) = E\Big((Y-E(Y))^2\Big) = E(Y^2) - 2E(Y)E(Y) + E(Y)^2 = E(Y^2) - E(Y)^2.$$

Esta expressão para a variância nos será útil na Subseção 2.5.

2.5. Risco de uma carteira de investimentos

O risco de uma carteira de investimentos depende não somente dos riscos dos ativos que a compõem, mas também da dependência entre os retornos desses ativos.

Como motivação, considere a situação em que as probabilidades de cenários e os retornos R_1, R_2 e R_3 das ações 1, 2 e 3, respectivamente, sejam dados pela Tabela 4.

Tabela 4: Cenários de retornos para três investimentos

Cenário	Probabilidade	R_1	R_2	R_3
ω_1	50%	20%	–10%	15%
ω_2	50%	–10%	20%	–5%

Utilizando (15), temos que os retornos esperados são $E(R_1) = E(R_2) = E(R_3) = 5\%$. Se dividirmos o capital investido igualmente entre as ações 1 e 2, segue de (16) que o retorno esperado dessa carteira é de

$$E(R) = x_1E(R_1) + x_2E(R_2) = 0{,}5(0{,}05 + 0{,}05) = 5\%.$$

Por sua vez, o retorno real é o mesmo nos dois cenários, já que

$$x_1R_1 + x_2R_2 = 0{,}5(0{,}2 - 0{,}1) = 5\% = 0{,}5(-0{,}1 + 0{,}2).$$

Apesar de termos $E(R_1) = E(R_2) = 5\%$, se investirmos em somente uma dessas ações, podemos ter –10% ou 20% de retorno, o que se traduz em riscos iguais de 15%, de acordo com (18). Portanto, teríamos o mesmo retorno esperado, mas uma variação bem maior nas possibilidades de retorno, o que naturalmente é traduzido em um risco bem maior.

Por outro lado, se dividirmos o capital igualmente entre as ações 1 e 3, teremos um investimento de risco ainda maior. De fato, o retorno esperado novamente é o mesmo:

$$E(R) = 0{,}5E(R_1) + 0{,}5E(R_3) = 0{,}5(0{,}05 + 0{,}05) = 5\%,$$

mas o retorno real dependerá do cenário. No primeiro, teremos $0{,}5(0{,}20 + 0{,}15) = 17{,}5\%$. Já no cenário 2, o retorno será negativo: $0{,}5(-0{,}1 - 0{,}05) = -7{,}5\%$.

Esse exemplo simples ilustra a importância da diversificação para reduzir o risco por meio do investimento em ações cujos retornos guardem relação negativa, como no caso da carteira formada pelos ativos 1 e 2. Já a carteira composta por ações com retorno de comportamento parecido frente aos mesmos cenários, o risco é aumentado e o retorno fica mais dependente dos cenários.

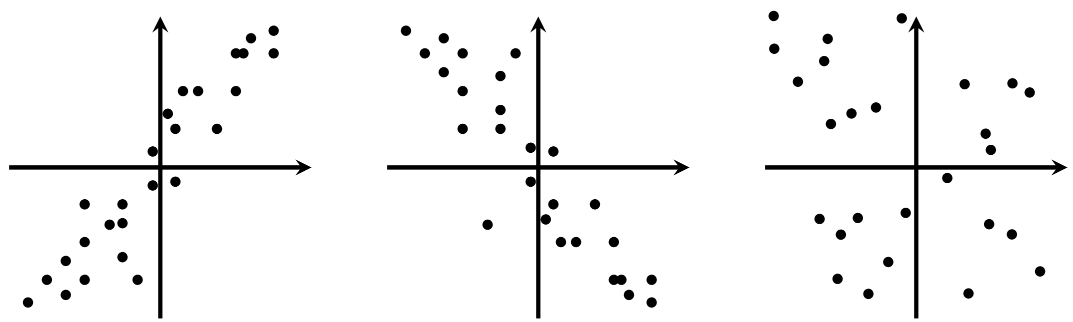
Isso leva-nos, naturalmente, à necessidade de estudar as medidas de dependência entre os retornos dos ativos. Para isso, é utilizada a covariância entre os retornos de dois ativos i e j. Sendo $n_1, \ldots, n_r$ os possíveis retornos para i, $m_1, \ldots, m_r$ aqueles para j e p_i a probabilidade de ocorrer (n_i, m_i), a **covariância** entre os retornos de i e j é definida como

$$\mathrm{Cov}(i, j) = E\Big((R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))\Big) = \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot (n_k - E(R_i)(m_k - E(R_j))) \tag{20}$$

O primeiro fator de cada parcela do somatório é a probabilidade, que não é negativa. O segundo e o terceiro são diferenças entre o retorno e o retorno esperado de cada ativo em cada cenário k. Vamos considerar que o comportamento dos retornos dos ativos i e j seja semelhante se ambos estiverem acima do retorno esperado ou ambos abaixo do retorno esperado. Caso contrário, diremos que os comportamentos são distintos. Note que comportamentos semelhantes produzem uma parcela positiva para o somatório, e comportamentos distintos produzem uma parcela negativa. Portanto, o valor da covariância é uma medida de quanto os retornos são semelhantes ou distintos considerado o conjunto de todos os cenários e suas respectivas probabilidades.

Se para cada cenário considerarmos um ponto do plano com coordenadas $n_k - E(R_i)$ e $m_k - E(R_j)$, caso os comportamentos sejam predominantemente semelhantes, teremos os pontos principalmente nos primeiro e terceiro quadrantes. Caso os comportamentos sejam distintos, teremos os pontos principalmente nos segundo e quarto quadrantes. Caso não haja uma predominância de um dos comportamentos, os pontos estão dispersos pelos quadrantes.

Figura 3: Exemplos de dados que estão positivamente, negativamente e não relacionados.



Exemplo 11. Considere os retornos esperados $R_1, \ldots, R_5$ de 5 investimentos em 4 cenários equiprováveis conforme a Tabela 5.

Tabela 5: Retorno de 5 investimentos em 4 cenários.

Cenário	Probabilidade	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
ω_1	25%	20%	15%	–10%	–15%	7,5%
ω_2	25%	–10%	–5%	20%	25%	10%
ω_3	25%	15%	17,5%	–10%	–5%	5%
ω_4	25%	–5%	–7, 5%	20%	15%	–2,5%

Podemos notar que os investimentos 1 e 2 têm o mesmo comportamento nos quatro cenários, e portanto dizemos que estão positivamente relacionados. O mesmo acontece com os investimentos 3 e 4. Mas quando comparamos 1 e 2 com 3 e 4, os comportamentos são antagônicos em todos os cenários. Assim, por exemplo, os investimentos 1 e 3 são negativamente relacionados. O investimento 5 não tem comportamento similar nem antagônico aos demais em todos os cenários e portanto dizemos que não existe relação entre ele e os demais.

Motivamos assim a definição de **risco da carteira** X, denotado por σ_X, como o desvio padrão do retorno R_X (veja 10) em relação ao retorno esperado, ou seja,

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(R_X)} \tag{21}$$

Veja (17) para a definição de desvio padrão e variância.

Uma maneira mais conveniente de expressar o risco da carteira é dada em termos os pesos de cada ativo. No Teorema 1 fazemos isso para uma carteira com dois ativos.

Teorema 1. *Para* $X = (x_1, x_2)$, *tem-se* $\mathrm{Var}(R_X) = x_1^2\mathrm{Var}(R_1) + 2x_1x_2\mathrm{Cov}(1,2) + x_2^2\mathrm{Var}(R_2)$.

Para a demonstração precisamos observar que a covariância (20) pode ser expressa como

$$\mathrm{Cov}(i,j) = E(R_iR_j) - E(R_i)E(R_j). \tag{22}$$

De fato, de (20) temos que $\mathrm{Cov}(i,j) = E\Big((R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))\Big)$. Multiplicando e utilizando a linearidade do valor esperado (Proposição 4), segue que $\mathrm{Cov}(i,j) = E(R_iR_j) - E(R_j)E(R_i) - E(R_i)E(R_j) + E(R_i)E(R_j) = E(R_iR_j) - E(R_i)E(R_j)$.

Demonstração. (do Teorema 1) De (19), temos que $\mathrm{Var}(R_X) = E(R_X^2) - E(R_X)^2$. Substituindo $R_X = x_1R_1 + x_2R_2$ e utilizando a Proposição 4, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(R_X) &= \Big(x_1^2E(R_1^2) + 2x_1x_2E(R_1R_2) + x_2^2E(R_2^2)\Big) - \Big(x_1^2E(R_1)^2 + 2x_1x_2E(R_1)E(R_2) + x_2^2E(R_2)^2\Big) \\
&= x_1^2(E(R_1^2 - E(R_1)^2) + x_2^2(E(R_2^2 - E(R_2)^2) + 2x_1x_2(E(R_1R_2) - E(R_1)E(R_2)) \\
&= x_1^2\mathrm{Var}(R_1) + x_2^2\mathrm{Var}(R_2) + 2x_1x_2\mathrm{Cov}(1,2),
\end{aligned}$$

sendo que na última igualdade utilizamos (22) e novamente (19). □

Denotando $\mathrm{Cov}(i,j)$ por c_{ij}, definimos a **matriz de covariância** dos ativos 1 e 2 como

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Note que C é simétrica e $c_{ii} = \mathrm{Var}(R_i) = \mathrm{Cov}(i,i)$, para $i = 1,2$. Assim, $\sigma^2(x) = xCx^T$, onde $x = (x_1\ x_2)$ e x^T é a transposta de x.

Essa forma matricial pode ser diretamente utilizada para expressar os resultados análogos para carteiras com um número maior de ativos, conforme veremos na Subseção 2.6.

Exemplo 12. Baseado na Tabela 3, considere uma carteira $X = (x_1, x_2)$ com o capital distribuído igualmente entre ações do Banco do Brasil (BBAS3) e do Banco Itaú (ITUB4), para a qual existem dois possíveis cenários de retorno, conforme a Tabela 6.

Tabela 6: Possibilidades de retornos para os ativos da carteira X.

Cenário	Probabilidades	Banco do Brasil (1)		Banco Itaú (2)	
		P(0)	P(1)	P(0)	P(1)
ω_1	50%	32,46	46,00	28,15	33,78
ω_2	50%	32,46	31,00	28,15	25,34

Nos cenários ω_1 e ω_2 temos os retornos dos ativos:

$$\mathrm{R}_1(\omega_1) = \frac{46{,}00 - 32{,}46}{32{,}46} \approx 0{,}4171, \quad \mathrm{R}_2(\omega_1) \approx 0{,}2, \quad \mathrm{R}_1(\omega_2) \approx -0{,}045, \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_2(\omega_2) \approx -0{,}0998.$$

De (15), os retornos esperados dos ativos são:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{R}_1) &= 0{,}5 \cdot 0{,}4171 + 0{,}5(-0{,}045) \approx \ 0{,}18605 \\ \mathrm{E}(\mathrm{R}_2) &= 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5(-0{,}0998) \approx \ 0{,}0501 \end{aligned}$$

enquanto para a carteira X temos, por (16), que

$$\mathrm{E}(\mathrm{R_X}) = 0{,}5\mathrm{E}(\mathrm{R}_1) + 0{,}5\mathrm{E}(\mathrm{R}_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}18605 + 0{,}5 \cdot 0{,}0501 \approx 11{,}81\%.$$

Com (18) e (20), calculamos o risco de cada um dos ativos e a covariância:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{0{,}5(0{,}4171 - 0{,}18605)^2 + 0{,}5(-0{,}045 - 0{,}18605)^2} \approx \sqrt{0{,}0534} \approx 0{,}2311 \\ \sigma_2 &= \sqrt{0{,}5(0{,}2 - 0{,}0501)^2 + 0{,}5(-0{,}0998 - 0{,}0501)^2} \approx \sqrt{0{,}0225} \approx 0{,}1499 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(1, 2) = 0{,}5(0{,}4171 - 0{,}18605)(0{,}2 - 0{,}0501) + 0{,}5(-0{,}045 - 0{,}18605)(-0{,}0998 - 0{,}0501) \approx 0{,}0346.$$

Assim, do Teorema 1, a variância da carteira X é

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = (0{,}5)^2(0{,}05334) + 2(0{,}5)(0{,}5)(0{,}0346) + (0{,}5)^2(0{,}0225) \approx 0{,}0363.$$

Finalmente, segundo (21), o risco da carteira X é

$$\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{0{,}0363} \approx 19{,}05\%.$$

2.6. Método de Média Variância de Markowitz

Como citamos na introdução, dados os ativos $1, \ldots, n$, cabe ao investidor definir os respectivos pesos $x_1, \ldots, x_n$ para formar sua carteira de investimentos, denotada por $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

A situação ideal seria poder escolher os pesos de forma a maximizar o retorno e minimizar o risco. Mas isso não é possível na prática, então impõe-se uma limitação a uma das funções, na forma de uma restrição, e otimiza-se a outra. Por exemplo, é possível buscar a carteira com o menor risco entre todas aquelas com o mesmo retorno esperado. De acordo com Markowitz, esta será uma **carteira eficiente**, ou ainda, um ponto no plano risco × retorno pertencente à **Fronteira Eficiente**.

Esse processo de otimização é chamado de Método de Média Variância de Markowitz, que vamos descrever brevemente. Para isso, vamos utilizar a notação matricial, conforme (23).

Sendo $\mathbf{x}$ o vetor $(x_1, \ldots, x_n)$ e fixado um retorno esperado μ para a carteira, para minimizar a variância σ^2 (o que é equivalente a minimizar o risco σ) deve-se resolver o problema de otimização

$$\text{Minimizar} \ \ \mathbf{x}\mathrm{C}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = 1, \\ \mathrm{R}_1 x_1 + \ldots + \mathrm{R}_n x_n = \mu \\ x_i \geq 0, \ \text{para } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

onde $C = (c_{ij})$ é a matriz de covariâncias, construída analogamente à (23), e $R_1, \ldots, R_n$ são os retornos esperados dos ativos $i = 1, \ldots, n$, respectivamente. A restrição que exclui pesos negativos é necessária quando não se admitir posições vendidas.

É possível mostrar que o problema possui única solução [9, Teorema 3.1], que pode ser obtida com auxílio computacional [13]. De fato, trata-se um problema de Programação Linear, que é um dos principais modelos da Pesquisa Operacional.

Se resolvermos o problema retirando a segunda restrição (que impõe o retorno) vamos obter como solução a carteira de menor risco possível. Determinar tal carteira traduz-se em um conhecido método de minimização de riscos, denominado de Método de Mínima Variância. Veja [3] para uma análise do comportamento do método na crise de 2008 e [8] para a crise de 2020.

O aspecto crítico no Método de Média Variância é a determinação da matriz de covariância, que depende fortemente dos retornos esperados.

Dado que esses parâmetros são desconhecidos *a priori*, uma alternativa é utilizar estimativas baseadas em dados históricos dos retornos ativos relacionados, da forma abordada em [8] e [13]. Veja também [3].

Outra forma de calcular o retorno esperado é utilizar a fórmula produzida pelo **modelo de precificação de ativos**, nome adaptado do inglês *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), proposto independentemente por William E. Sharpe e John Lintner. Veja [18, p. 231] para uma exposição sobre esse método.

Cabe ressaltar que estratégias de diversificação de investimentos utilizam-se, em geral, de um número maior do que dois ativos nas carteiras. Levando-se em conta as tarifas cobradas e os potenciais benefícios da diversificação, em [17] afirma-se que doze é o número ideal de ativos para uma carteira de ações.

Finalizamos assim a nossa introdução à Teoria do Portfólio. Ressaltamos que toda nossa abordagem do conceito de risco para carteiras com apenas dois ativos pode ser facilmente generalizada para casos mais gerais, conforme requer o Método de Média Variância. Veja [5] e [18].

3. Aplicações à Educação Financeira e ao Ensino Médio

Na seção anterior exploramos a Teoria do Portfólio (TP), abordando-a de forma a facilitar sua utilização em atividades de Educação Financeira. Em especial, a partir do Teorema 1, tratamos da noção de risco de investimento de carteiras compostas por dois ativos. Essa abordagem permitirá, neste capítulo, utilizar funções quadráticas para modelar e minimizar risco, conforme faremos na última subseção - Proposta 6.

Para chegarmos a isso, vamos seguir por um caminho no qual outras aplicações interessantes irão aparecer. A partida dá-se na proposta seguinte - Subseção 3.1 - que na prática é uma motivação a estudar o mercado acionário brasileiro.

Na sequência - Proposta 2 - iniciamos as aplicações utilizando equações em duas variáveis para uma atividade sobre montagem de uma carteira de investimentos. Já na Proposta 3 utilizamos os conceitos de proporcionalidade e percentagem para estudar a composição de carteiras adicionando outros ativos, como renda fixa e criptomoedas. Cálculos de retorno e retorno esperado são propostos nas Subseções 3.4 e 3.5.

3.1. Proposta 1: Motivação e introdução ao mercado de ações

Como mencionamos na introdução deste trabalho, há diversas iniciativas voltadas para a divulgação do investimento em ações, que podem servir de referência para uma primeira abordagem do assunto em uma sala de aula. Visando focar nas atividades que realmente utilizem os conteúdos de matemática e estatística, nesta seção elencaremos algumas ideias que podem ser discutidas com os estudantes em uma primeira abordagem.

O primeiro passo é explicar o significado de uma ação de uma empresa negociada na bolsa de valores. Faz sentido pensar em uma ação como uma parte societária da empresa. Assim, a pessoa que a compra torna-se sócia do negócio. Mas trata-se de um sócio especial, de responsabilidade limitada, no sentido que pode perder no máximo aquilo que investiu. Isso quer dizer que o investidor não possui qualquer responsabilidade no caso de a empresa falir e deixar dívidas, por exemplo. Por outro lado, ele pode ganhar muito: não há preço máximo para a ação e os lucros e dividendos gerados pela empresa reverter-se-ão, parcialmente, ao investidor como depósitos em sua conta na corretora.

Na sequência o ideal é explicar brevemente a parte operacional. A negociação de ações ocorre normalmente de forma virtual num mercado organizado para tal fim, a chamada bolsa de valores. A empresa B3 (antiga Bovespa) opera ações brasileiras e títulos atrelados a ações estrangeiras, além de diversos outros ativos e contratos. Para negociar uma ação, é preciso abrir uma conta em uma corretora, a qual funciona como intermediária entre a B3 e os investidores. Após a abertura da conta e a transferência do dinheiro para a conta na corretora, já se pode fazer o primeiro negócio.

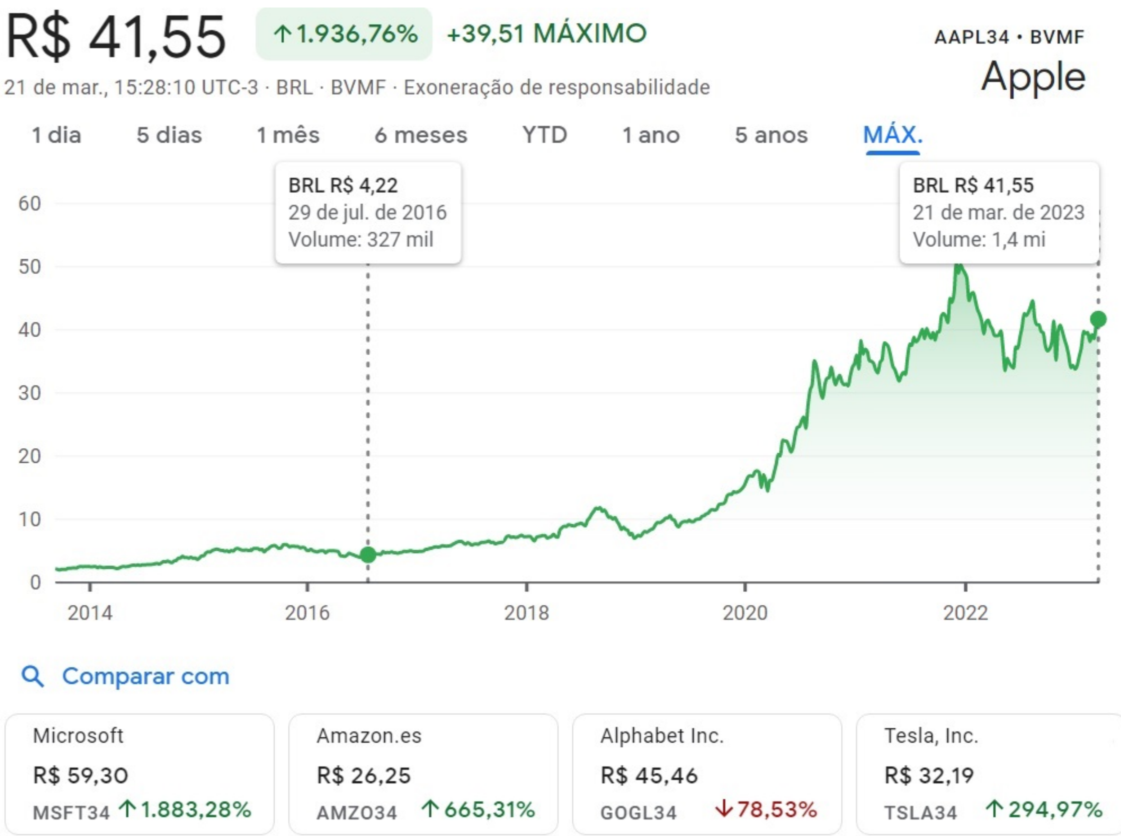
Um estudante, mesmo menor de idade, pode iniciar uma carteira de investimentos em ações ou títulos de renda fixa. Claro que há restrições legais, como ter o acompanhamento dos pais ou responsáveis para abertura de conta em seu próprio nome. O investimento inicial pode ser realmente pequeno, como, por exemplo, R$ 10,00.

A compra e venda de ações está bastante facilitada por meio de aplicativos e *home brokers* simplificados disponibilizados por bancos e corretoras. O ideal para um estudante seria abrir uma conta na corretora e testar a negociação com valores pequenos. Contudo, em uma atividade em sala, pode também ser utilizado um simulador gratuito. Podemos citar o aplicativo da Vexter Investimentos e o site ADVFN. No aplicativo é disponibilizado um capital inicial fictício de R$ 100.000,00 para negociação. Já no *site* é possível informar qualquer valor inicial desejado.

Em uma simulação de investimento é adequado utilizar ações de empresas familiares aos estudantes. Por exemplo, alguns deles podem estar com um iPhone na mão ou na bolsa. Na B3 é possível investir na Apple via o *ticker* AAPL34, cotado em reais. No final de julho de 2016, a cotação equivalente era R$ 4,22. Em 21 de março de 2023, a cotação era R$ 41,55. Podemos utilizar o *site* do Google Finance para exemplificar os retornos, conforme a Figura 4. Há a opção de comparar o retorno da Apple com outras empresas familiares aos estudantes, como, por exemplo o Google (Alphabet Inc.), Microsoft, Amazon, etc.

Para mostrar aos estudantes como pode ser rentável o investimento em ações, pode-se citar o exemplo de uma pessoa que decidiu comprar um iPhone em 29 de julho de 2016. O iPhone 7 foi lançado perto dessa data, sendo o modelo mais simples vendido por cerca de R$ $3.111,99$. Se tal valor tivesse sido investido na Apple, seria possível comprar o equivalente à 737 AAPL34 e sobrar R$ 1,85. Na cotação atual (21 de março 2023), o valor corresponderia a R$ $30.622,35$, enquanto o iPhone 7 básico está valendo algo próximo de R$ $1.000,00$. Veja outros exemplos na Figura 5. Neste ponto devem estar claros os possíveis benefícios do investimento em ações. Contudo, deve-se

Figura 4: Evolução do investimento em Apple.



Fonte: Google Finance. Acesso em 21/03/2023.

lembrar que o valor das ações de uma empresa pode oscilar bastante, muitas vezes fazendo o valor reduzir significativamente. Nesse sentido podemos citar a empresa de telefonia Oi S.A. cujo valor de suas ações apresentaram grande queda no período em questão (Figura 6).

Figura 5: Comparação entre valores de produtos e ações ao longo do tempo.

Fonte: Guiainvest (facebook). Acesso em 01/06/2022.

Figura 6: Cotação de Oi em 13 de março de 2023

Fonte: Google Finance. Acesso em 13/03/2023.

Destaca-se então a necessidade de conhecer os fundamentos das empresas. Isto é, saber a magnitude de suas dívidas, se ela está ou não gerando lucro, entre outros fatores. Um *site* especializado que pode ajudar na análise de mercado sobre determinada empresa é o Fundamentus. Outros fatores relevantes para uma discussão inicial seriam a importância da diversificação, do investimento para longo prazo e da gestão de risco, temas abordados nas seções seguintes.

3.2. Proposta 2: Alocação de recursos em uma carteira com duas ações

Na subseção anterior motivamos o estudo do mercado de ações e evidenciamos como a escolha adequada das empresas para investir e o foco em um prazo estendido pode trazer ótimos resultados financeiros. Vimos também que é possível a um estudante simular uma carteira de investimentos em ações, ou mesmo iniciá-la de verdade por meio da abertura de uma conta em uma corretora.

De acordo com dados de 2021 da B3 [1], 15% dos cerca de 3.8 milhões de investidores cadastrados possui uma carteira composta por no máximo dois títulos e com valor total aproximado de R$ 352,00. Nesta seção consideramos esses fatos para elaborar uma aplicação prática com estudantes.

Veremos como explorar equações lineares em duas variáveis na montagem de uma carteira de investimentos com duas ações e como minimizar recursos disponíveis e não investidos.

No Exemplo 13 propomos aos estudantes montar uma carteira com duas ações

$$C = (x_1, x_2)$$

conforme (3), onde x_1 representa o percentual do capital a ser alocado nas ações da empresa 1, *ticker* EMPR1, e $x_2 = 1 - x_1$ o percentual a ser alocado nas ações da empresa 2 (EMPR2). Vamos assumir sempre que esses números são positivos.

Exemplo 13. Vamos considerar um jovem investidor que já tenha feito sua análise de mercado e optado por realizar seus investimentos em duas empresas de sua preferência. Suponha, então, que EMPR1 esteja hoje cotada a R$ 10,00 e EMPR2 esteja R$ 13,00 e que se tenha R$ 456,00 disponíveis pra serem investidos. Analisaremos as seguintes situações:

(a) Quais são as carteiras possíveis para que ele possa utilizar todo o capital disponível? Quantas ações de cada empresa devem ser adquiridas para tal fim?

(b) Qual seria a carteira para se obter uma divisão igualitária do capital entre as ações?

Sejam x e y as quantidades de ações a serem compradas, de EMPR1 e EMPR2, respectivamente. Teremos então a equação de primeiro grau em duas várias variáveis

$$10x + 13y = 456. \tag{24}$$

A Equação 24 apresenta números inteiros como coeficientes e termo independente. Interessa-nos também somente soluções inteiras, pois, no mercado acionário brasileiro, não é possível comprar frações de uma ação. Logo, trata-se de uma Equação Diofantina Linear (EDL). Soluções de EDLs sobre $\mathbb{Z}$ e sobre $\mathbb{N}$ são detalhadas no livro [10]. Utilizando essas soluções, uma aplicação das EDLs no mercado de ações brasileiro foi desenvolvida em Dario [7].

Para os fins deste trabalho, vamos utilizar somente os métodos de solução abordados já nos anos finais do Ensino Fundamental. Embora lá se trabalhe com soluções nos números reais, um dos métodos pode ser utilizado diretamente no nosso exemplo, conforme faremos na sequência.

Para isso, reescrevemos (24) como

$$10x = 456 - 13y.$$

Sendo $456 - 13y$ um número múltiplo de 10, vamos iniciar testando alguns valores para y:

y	10x	Múltiplo de 10
0	$456 - 13 \cdot 0 = 456$	Não
1	$456 - 13 \cdot 1 = 443$	Não
2	$456 - 13 \cdot 2 = 430$	Sim

Seguindo assim podemos concluir que $y \in \{2, 12, 22, 32\}$, pois qualquer valor fora desse conjunto faria com que o valor de x fosse negativo, o que não é o caso. Agora, substituindo os valores de y na Equação 24 obtemos os respectivos valores de x.

y	10x	x
2	$10x = 456 - 13 \cdot 2$	43
12	$10x = 456 - 13 \cdot 12$	30
22	$10x = 456 - 13 \cdot 22$	17
32	$10x = 456 - 13 \cdot 32$	4

Temos então 4 possibilidades para as aquisições das ações e podemos agora encontrar qual o percentual do capital a ser alocado em ações de cada empresa, conforme a definição de peso de um ativo (2). Assim, para a possibilidade de 43 ações da empresa 1 e 2 ações da empresa 2, temos

$$x_1 = \frac{43 \cdot 10{,}00}{456{,}00} \approx 0{,}9430 = 94{,}30\%, \qquad x_2 = \frac{2 \cdot 13{,}00}{456{,}00} \approx 0{,}057 = 5{,}70\%.$$

Os resultados para as demais possibilidades são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Possibilidades de alocação do capital do investidor do Exemplo 13

Possibilidade	EMPR1	EMPR2	Carteira
1	43 ações	2 ações	(0,9430; 0,0570)
2	30 ações	12 ações	(0,6579; 0,3421)
3	17 ações	22 ações	(0,3728; 0,6272)
4	4 ações	32 ações	(0,0877; 0,9123)

Respondemos assim as questões do item (a). Para (b), precisamos obter a divisão igualitária do capital entre as ações, isto é, R$ 228,00 para cada empresa.

Neste caso temos $10x = 228$, o que implica $x = 22{,}8$. Ainda, de $13y = 228$ obtemos $y \approx 17{,}5$.

Logo, será possível comprar 23 ações de EMPR1, 17 ações de EMPR2 e ainda lhe sobrará um valor de R$ 5,00 na conta, pois $456 - 10 \cdot 23 + 13 \cdot 17 = 5$. Em termos percentuais, 50,44% do capital seria investido na empresa 1 e 48,46% na empresa 2.

No item (a) todo o capital disponível foi utilizado, enquanto que no item (b) restaram R$ 5,00, ou aproximadamente 1,1% do capital. Um método para escolher as quantidades de ações, de forma a minimizar o capital não investido, foi apresentado em [7].

3.3. Proposta 3: Proporcionalidade e porcentagem

O objetivo desta atividade é abordar os temas de porcentagem e proporcionalidade por meio do conceito de carteira de investimentos (3). Vamos exemplificar como considerar estes conteúdos na atualização dos pesos dos ativos da carteira conforme decorre o tempo.

Além de ações, vamos considerar nas carteiras outras classes de ativos, como títulos de renda fixa e criptomoedas. Aos estudantes deverá ser natural o conceito de renda fixa, pois pode ser facilmente exemplificado através de investimentos tradicionais como poupança ou Tesouro Direto. Por outros lado, poderá ser interessante uma abordagem mais detalhada sobre criptomoedas.

Essa classe de ativos certamente irá gerar bastante interesse. Basta citar que a principal criptomoeda, o Bitcoin, já é bastante utilizada pelos brasileiros até como forma de investimento, tanto que o número de detentores desse ativo já supera em muito o número de investidores da Bolsa de Valores e do Tesouro Direto.

De acordo com [20], o Bitcoin é uma forma de dinheiro, assim como o real, o dólar ou o euro, com a diferença de ser puramente digital e não ser emitido por nenhum governo. O seu valor é determinado livremente pelos indivíduos no mercado. Para transações *online*, é a forma ideal de pagamento, pois é rápido, barato e seguro.

Vejamos uma aplicação direta aos conteúdos citados no início da seção.

Exemplo 14. Um satoshi (SAT) é a menor unidade de um Bitcoin (BTC) e equivale a 0,00000001 BTC (ou 10^{-8} BTC), conforme mostra a Figura 7. Considerando a utilização de criptomoedas em transações reais e sendo o Bitcoin cotado à R$ 100.000,00 (ou 10^7 centavos), qual será o preço, em satoshis, de um café expresso de R$ 5,50?

Figura 7: Relação Satoshi × Bitcoin

Satoshi	Bitcoin
1	0.00000001
10	0.00000010
100	0.00000100
1,000	0.00001000
10,000	0.00010000
100,000	0.00100000
1,000,000	0.01000000
10,000,000	0.10000000
100,000,000	1.00000000

Fonte: 0xzx.com. Acesso em 18/06/22.

Para solucionar tal problema esperamos que os alunos possam reconhecer que sua solução decorre de cálculos simples de proporção. Dada a cotação do Bitcoin e a proporção do satoshi, temos

$$1\,\mathrm{sat} = 0{,}00000001 \cdot \mathrm{R\$}\,100.000{,}00 = \mathrm{R\$}\,0{,}001$$

ou, alternativamente, $10^{-8} \cdot 10^{7} = (1 \text{ centavo})/10$. Sendo assim para determinarmos o valor do café expresso em satoshis devemos dividir o valor do café pela cotação de um satoshi, obtendo

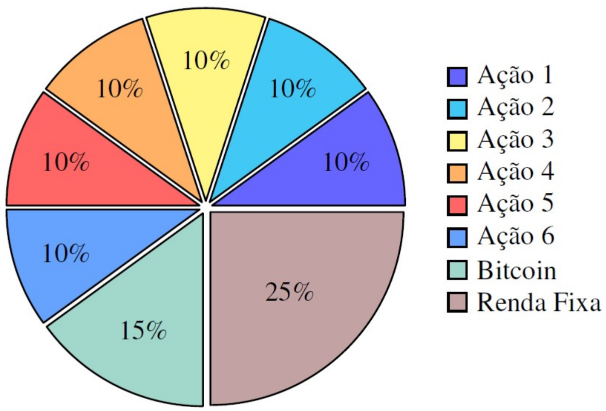
$$\text{Preço do café expresso} = \frac{\mathrm{R\$}\,5{,}50}{\mathrm{R\$}\,0{,}001} = 5.500\,\mathrm{SAT}.$$

Situações semelhantes já não são hipotéticas em países como El Salvador e República Centro Africana, onde o Bitcoin já foi adotado como moeda de curso legal.

Vejamos agora um primeiro exemplo de carteira de investimento com essas classes de ativos.

Exemplo 15. João é um investidor arrojado que aloca 60% de seu capital em ações de 6 empresas, 10% cada uma. Outros 25% do capital estão investidos em um título de renda fixa. João também mantém 15% alocado em Bitcoin. Sua carteira de investimentos é apresentada na Figura 8.

Figura 8: Carteira Inicial do João



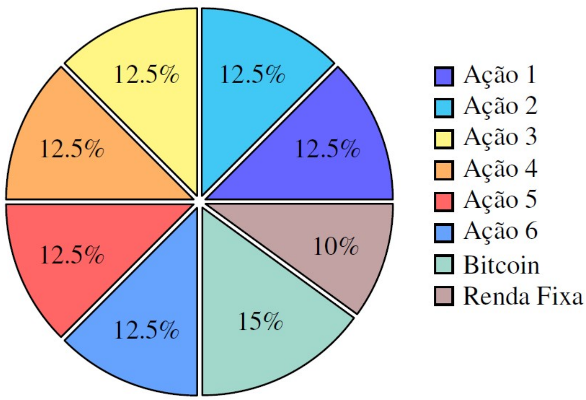
Conforme (2), sabemos que a soma dos pesos dos ativos de uma carteira é igual a 1. Portanto, ordenando seus oito ativos, podemos estabelecer que a sua carteira hoje é

$$X(0) = (0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}15 \quad 0{,}25).$$

Entretanto, João decidiu ser ainda mais arrojado e reduzir sua posição de renda fixa de 25% para apenas 10% da carteira. O capital obtido será distribuído igualmente entre as 6 ações. Como é representada a carteira de João no tempo 1, ou seja, qual é o vetor X(1)?

Note que a redução de 15% na posição de renda fixa (de 25% para 10%) deve ser redistribuída de forma igualitária entre todas as seis ações que ele investe. Logo teremos uma acréscimo de 15% : 6 = 2,5% em cada ação. Dessa forma a nova carteira X(1) de João é representada pela Figura 9

Figura 9: Carteira final do João

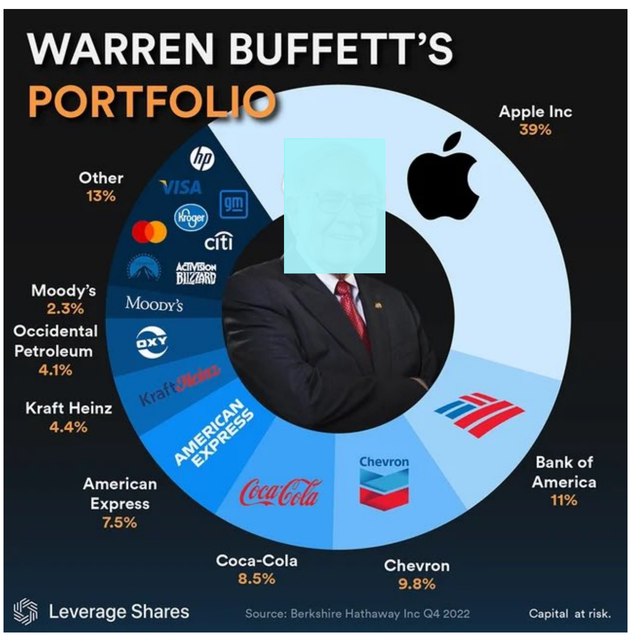


Mantendo a sequência de ativos, podemos estabelecer que a sua carteira atual é

$$X(1) = (0{,}125 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}15 \;\; 0{,}1).$$

Ainda sobre a representação de portfólios, podemos propor aos estudantes que encontrem o erro na figura que ilustra a carteira de ações de Warren Buffett, considerado o maior investidor do mundo.

Figura 10: Carteira de ações de Warren Buffett - 2022



Fonte: Berkshire Hathaway Inc.

A valorização ou desvalorização dos ativos interfere diretamente nos seus pesos na carteira, fazendo com que a mesma possa ficar concentrada apenas em alguns deles, ou no extremo, em um único ativo. Veja a situação a seguir.

Exemplo 16. Em 2015, um investidor detinha 300 ações da Empresa 1 (EMPR1), cotadas a R\$ 33,00, 150 ações da Empresa 2 (EMPR2), cotadas a R\$ 45,00, e 1 Bitcoin (BTC), cotado a R\$ 1.237,00. Ele não movimentou sua carteira por 5 anos, até 2020, quando a ação da Empresa 1 passou a ser cotada a R\$ 40,00 e a ação da Empresa 2 estava R\$ 25,00. O Bitcoin, por sua vez, foi para R\$ 79.405,00. Analisando esse cenário, qual o peso de cada ativo na carteira desse investidor em 2015 e em 2020?

Inicialmente precisamos encontrar os valores inciais e finais da carteira. Pondo $\mathrm{t} = 0$ para o ano de 2015, $\mathrm{t} = 1$ para 2020 e usando (1), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(0) &= 300 \cdot 33{,}00 + 150 \cdot 45{,}00 + 1 \cdot 1.237{,}00 \quad = \text{R\$ } 17.887{,}00 \\ \mathrm{V}(1) &= 300 \cdot 40{,}00 + 150 \cdot 25{,}00 + 1 \cdot 79.405{,}00 = \text{R\$ } 95.155{,}00 \end{aligned}$$

Numerando os ativos pela ordem de citação como 1, 2 e 3, temos que seus pesos são

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_1(0) &= \frac{300 \cdot 33{,}00}{17.887{,}00} \approx 55{,}35\% & \qquad \mathrm{x}_1(1) &= \frac{300 \cdot 40{,}00}{95.155{,}00} \approx 12{,}61\% \\ \mathrm{x}_2(0) &= \frac{150 \cdot 45{,}00}{17.887{,}00} \approx 37{,}74\% & \qquad \mathrm{x}_2(1) &= \frac{150 \cdot 25{,}00}{95.155{,}00} \approx \ 3{,}94\% \\ \mathrm{x}_3(0) &= \frac{1 \cdot 1\,237{,}00}{17.887{,}00} \approx 6{,}91\% & \qquad \mathrm{x}_3(1) &= \frac{1 \cdot 79\,405{,}00}{95.155{,}00} \approx 83{,}45\% \end{aligned}$$

Fica evidente que a grande valorização do BTC no período fez com que a carteira ficasse extremamente concentrada neste ativo.

3.4. Proposta 4: Cálculos de retorno

Nas Subseções 3.1, 3.2 e 3.3 exploramos exemplos e atividades iniciais sobre a formação de carteiras de investimento. A continuação natural é o desenvolvimento de propostas retomando os conceitos de retorno de ativos financeiros e retorno esperado, conforme as Subseções 2.2 e 2.3, respectivamente.

Nesta atividade propomos o acompanhamento de uma carteira de investimentos com duas ações por um determinado período de tempo, bem como seu cálculo da rentabilidade. A critério do professor, a atividade pode ser realizada com auxílio de planilhas eletrônicas. Para simplificar a abordagem, não vamos considerar proventos, isto é, faremos $\mathrm{D}_\mathrm{i} = 0$ na fórmula (7).

Conforme a Subseção 3.1, é adequado motivar os estudantes para que escolham ações de duas empresas de seu interesse e também que seja fixado um capital inicial para ser utilizado durante a simulação de investimentos.

Para facilitar a busca por empresas, o professor poderá ter de forma prévia uma lista de ações que sejam conhecidas e possivelmente interessantes para os estudantes.

Juntamente com a escolha das empresas é importante que seja verificada a cotação de cada ação para que os estudantes possam realizar os cálculos de quantas ações de cada empresa poderão comprar.

Vale ressaltar que existe um grande número de combinações possíveis e isso torna a simulação ainda mais esclarecedora.

Tabela 8: Lista sugestão de empresas com seus *tickers* e cotações de 15/01/2022

Empresa	Ticket	Cotação (R$)
Google	GOGL34	103,00
Meta (Facebook)	M1TA34	65,19
Apple	AAPL34	95,91
Microsoft	MSFT34	71,70
Itaú Unibanco	ITUB4	23,50
Banco do Brasil	BBAS3	30,41
Nubank	NUBR33	7,56
Magazine Luiza	MGLU3	6,33
Amazon	AMO34	114,40
Positivo Tecnologia	POSI3	8,20

Orienta-se então os estudantes a alocarem o seu capital inicial, neste exemplo fixado em R$ 1.000,00, nas ações das empresas escolhidas e registrarem as informações iniciais em uma planilha de controle, que pode ser física ou eletrônica.

Utilizando (2), determinamos os pesos dos ativos na carteira e com isso temos a Carteira Inicial, conforme o exemplo da Tabela 9.

Tabela 9: Exemplo de planilha de controle **inicial** de investimento em ações

		Carteira Inicial			**Carteira Final**			
Ticker	Quant.	R$ Inicial	Total	Carteira	R$ Final	Total	Carteira	Retorno
EMPR1	11	65,00	715,00	0,715				
EMPR2	36	7,80	280,80	0,281				
CAIXA			4,20	0,004				
			R$ **1.000,00**	**1,00**				

Decorrido determinado período de tempo que pode ser 1 dia, 1 semana, 1 mês etc, (definição a cargo do professor), realizamos o acompanhamento da evolução do investimento e o registro dos resultados, tendo assim a Carteira Final (Tabela 10).

Tabela 10: Exemplo de planilha de controle em andamento

		Carteira Inicial			Carteira Final			
Ticker	Quant.	R$ Inicial	Total	Carteira	R$ Final	Total	Carteira	Retorno
EMPR1	11	65,00	715,00	0,715	73,40	807,40	0,746	
EMPR2	36	7,80	280,80	0,281	7,50	270,00	0,250	
CAIXA			4,20	0,004		4,20	0,004	
			R$ **1.000,00**	**1,00**		R$ **1.081,60**	**1,00**	

Baseados nos dados registrados na planilha, determinamos agora o retorno de cada uma das ações das empresas selecionadas, sendo R_1 e R_2 o retorno da empresa 1 e da empresa 2, respectivamente.

$$R_1 = \frac{73{,}40 - 65{,}00}{65{,}00} \approx 12{,}92\% \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{7{,}50 - 7{,}80}{7{,}80} \approx -3{,}85\%.$$

No nosso exemplo a carteira inicial era $X(0) = (0{,}715;\ 0{,}281;\ 0{,}004)$. Utilizando (10), temos que o retorno da carteira é

$$R(1) = 0{,}715 \cdot 0{,}1292 + 0{,}281(-0{,}0385) \approx 8{,}16\%,$$

completando assim a planilha de controle (Tabela 11).

Tabela 11: Exemplo de planilha de controle **final**

		Carteira Inicial			Carteira Final			
Ticker	Quant.	R$ Inicial	Total	Carteira	R$ Final	Total	Carteira	Retorno
EMPR1	11	65,00	715,00	0,715	73,40	807,40	0,746	12,92%
EMPR2	36	7,80	280,80	0,281	7,50	270,00	0,250	-3,85%
CAIXA			4,20	0,004		4,20	0,004	0,00
			R$ **1.000,00**	**1,00**		R$ **1.081,60**	**1,00**	8,16%

Dessa forma cada estudante, ou grupo de estudantes, terá os dados iniciais, de acompanhamento e finais de sua carteira e poderá ser feita uma análise de forma coletiva de quais foram as carteiras mais/menos rentáveis entre outras discussões que podem ser trabalhadas após essa proposta.

3.5. Proposta 5: Cálculos de retorno esperado

Dedicamos esta proposta ao cálculo do retorno esperado de uma carteira de investimento em ações. Essa atividade pode ser uma continuação das anteriores ou independente, desde que já trabalhados as definições e resultados necessários. Conforme citamos na Subseção 2.3, o retorno esperado de um investimento depende de uma distribuição de probabilidades entre os diversos cenários futuros que possam influenciar o preço dos ativos em questão. **Ressaltamos que nossos cálculos de retorno esperado são somente para fins educacionais e não contemplam diversos outros fatores que podem influenciar o preço de uma ação.**

Analogamente à Proposta 4, a escolha das ações pode ser feita de forma a ser mais atrativa aos estudantes. Um exemplo de apelo é a empresa Meta Platforms Inc. (antigo Facebook) que recentemente lançou o Metaverso, uma espécie de réplica da realidade através de dispositivos digitais.

Poderia então ser interessante analisar o preço atual da ação de Meta, em junho de 2022 cotada a R$ 30,27, nos possíveis cenários para a consolidação do Metaverso no período de um ano no futuro. Se o projeto der muito certo, a ação naturalmente vai se valorizar. Caso contrário, sua cotação provavelmente cairá. Poder-se-ia então estabelecer as seguintes possibilidades:

Tabela 12: Cenários para Meta.

Cenário	Probabilidade	Valor	Retorno
Metaverso é um grande sucesso	60%	R$ 41,23	R_1
Metaverso não empolga, mas mantém interesse	25%	R$ 32,25	R_2
Metaverso é um fracasso	15%	R$ 24,76	R_3

Podemos então pedir aos estudantes que atribuam suas próprias probabilidades de sucesso/fracasso do Metaverso e calculem os retornos esperados, conforme (7) e (15). Os possíveis retornos são

$$R_1 = \frac{41{,}23 - 30{,}27}{30{,}27} \approx 36{,}21\%, \quad R_2 = \frac{32{,}25 - 30{,}27}{30{,}27} \approx 6{,}54\% \quad \text{e} \quad R_3 = \frac{24{,}76 - 30{,}27}{30{,}27} \approx -18{,}20\%.$$

Considerando as probabilidades apresentadas e os retornos calculados, na nossa simulação da empresa Meta, teremos o retorno esperado, denotado por $E(R_M)$:

$$E(R_M) = 0{,}6 \cdot 0{,}3621 + 0{,}25 \cdot 0{,}0654 + 0{,}15(-0{,}1820) \approx 20{,}63\%.$$

Vejamos agora a empresa Positivo Tecnologia, que fabrica computadores e *notebooks*. No mercado educacional desenvolve *softwares* e distribui *hardwares* como, por exemplo, a *LEGO Education*. Em 2022, a empresa lançou a plataforma educacional integrada Suítes Pedagógicas onde professores e alunos têm acesso a diversas aplicações nas áreas de Língua Portuguesa, Matemática e STEAM em um único lugar com segurança de dados e com a facilidade do *sign sin on* (login automático).

Em junho de 2022, o preço da ação da Positivo Tecnologia (POSI3) estava R$ 5,53. Vamos considerar três cenários para o período de um ano, conforme a Tabela 13, já com os retornos calculados de forma análoga ao caso anterior.

Tabela 13: Cenários para Positivo S.A.

Cenário	Probabilidade	Valor	Retorno
Suítes Pedagógicas revoluciona a educação	60%	R$ 6,35	14,83%
Suítes Pedagógicas entrega apenas o básico	25%	R$ 5,79	4,7%
Suítes Pedagógicas é mais do mesmo	15%	R$ 4,87	−11,93%

Assim, denotando por $E(R_P)$ o retorno esperado para Positivo, temos

$$E(R_P) = 0{,}6 \cdot 0{,}1483 + 0{,}25 \cdot 0{,}047 + 0{,}15(-0{,}1193) \approx 8{,}28\%.$$

Além de avaliarmos os cenários de cada empresa individualmente, vamos analisar carteiras de investimentos formadas com ações de duas das empresas já analisadas. Para isso, vamos utilizar também a ação do Banco Itaú (ITUB4), mantendo o retorno esperado de $11,75\%$ conforme o Exemplo 8.

Chamaremos de X a carteira composta por Meta e Positivo, Y a carteira com Meta e Itaú, e, finalmente, Z aquela formada por Positivo e Itaú. Nas três carteiras vamos assumir que o capital está igualmente dividido entre as duas empresas que as compõe. Podemos agora determinar os retornos esperados de cada uma das carteiras utilizando a Definição 16. Assim,

$$\mathrm{E}(\mathrm{R_X}) = 0{,}5 \cdot 0{,}2063 + 0{,}5 \cdot 0{,}0828 \approx 14{,}46\%, \quad \mathrm{E}(\mathrm{R_Y}) \approx 16{,}19\% \quad \text{e} \quad \mathrm{E}(\mathrm{R_Z}) \approx 10{,}02\%.$$

Podemos então comparar e analisar, em nossa simulação, qual dentre as três carteiras compostas apresenta a maior rentabilidade considerando um determinado período de tempo a partir do investimento.

3.6. Proposta 6: Cálculo e minimização de risco

Esta atividade consiste no cálculo de risco de investimento de carteiras com duas ações e na minimização de risco, modelado como uma função quadrática. Com base nas atividades anteriores, vamos formar carteiras de investimentos e analisar seus respectivos riscos.

Vamos agrupar em uma única tabela as informações apresentadas na Subseção 3.5 sobre as empresas Meta e Positivo. Vamos também utilizar os dados do Exemplo 8 para as ações do Banco Itaú.

Para isso consideraremos os cenários: otimista (ω_1), estagnação (ω_2) e pessimista (ω_3), sendo P(0) o valor inicial da ação e P(1) o valor da ação decorrido o período de um ano, conforme Tabela 14.

Tabela 14: Possibilidades de retornos para 3 ativos.

ω	Prob.	Meta			Itaú			Positivo		
		P(0)	P(1)	R	P(0)	P(1)	R	P(0)	P(1)	R
ω_1	60%	30,27	41,23	0,3621	28,15	33,78	0,20	5,53	6,35	0,1483
ω_2	25%	30,27	32,25	0,0654	28,15	29, 56	0,05	5,53	5,79	0,047
ω_3	15%	30,27	24,76	−0,182	28,15	25,34	−0,10	5,53	4,87	−0,1193

Utilizaremos as carteiras descritas na Subseção 3.5, onde a primeira (X) formada pelas empresas Meta e Positivo, e a segunda (Y) formada pelas empresas Meta e Itaú, e a terceira (Z) composta pela empresas Positivo e Itaú.

Primeiramente, utilizando (17), podemos calcular as variâncias para as ações das três empresas, abreviadamente denotadas pelas suas letras iniciais. Assim,

$$\mathrm{Var(M)} = 0{,}6(0{,}3621 - 0{,}2063)^2 + 0{,}25(0{,}0654 - 0{,}2063)^2 + 0{,}15(-0{,}1820 - 0{,}2063)^2 \approx 0{,}0421.$$

De forma análoga, $\mathrm{Var(P)} \approx 0{,}009$ e $\mathrm{Var(I)} \approx 0{,}0123$, tendo sido o último resultado já obtido no Exemplo 10.

As covariâncias serão calculadas por meio da fórmula (20):

$$\mathrm{Cov}(M,P) = 0{,}6(0{,}3621-0{,}2063)(0{,}1483-0{,}0828)+0{,}25(0{,}0654-0{,}2063)(0{,}047-0{,}0828)$$

$$+0{,}15(-0{,}1820-0{,}2063)(-0{,}1193-0{,}0828) \approx 0{,}0192.$$

Analogamente, $\mathrm{Cov}(M,I) \approx 0{,}0227$ e $\mathrm{Cov}(P,I) = 0{,}0104$.

Finalmente, o risco das carteiras X, Y e Z será dado pelo Teorema 1, de forma que

$$\sigma_X = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}0421 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}0192 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}009} \approx 14{,}96\%, \quad \sigma_Y \approx 15{,}81\% \quad \text{e } \sigma_Z \approx 10{,}27\%.$$

Com as informações disponíveis, concluímos que a carteira com menor risco é Z, composta pelas empresas Positivo e Itaú. Cabe destacar que, como visto na Subseção 3.5, esta é também a carteira com o menor retorno esperado.

Na Tabela 14, observe que os retornos dos 3 ativos são semelhantes, conforme discutimos na Subseção 2.5. Isso justifica os altos percentuais que obtivemos como riscos das carteiras. Note ainda que X e Y possuem retorno esperado e risco semelhantes.

Em uma sequência dessa atividade, poderia ser montada outra carteira, com a introdução de um ativo com retornos opostos aos três que apresentamos, de maneira que os percentuais de risco sejam reduzidos.

3.6.1 Risco e funções quadráticas

Vamos agora iniciar a última parte do trabalho que trata da modelagem do risco de investimentos como uma função quadrática.

Esta atividade consiste na minimização de risco para uma carteira X com duas ações, na qual um percentual x_1 do capital é investido na ação da empresa 1 (EMPR1) e o percentual x_2 é alocado na ação da empresa 2 (EMPR2). Lembrando que $x_1 + x_2 = 1$, podemos utilizar uma única variável $x = x_1$ para o problema, de forma que

$$X = (x,\ 1-x). \tag{25}$$

Os objetivos desta etapa são:

(1) Determinar as alocações x e $1-x$ de forma que o risco da carteira X seja o menor possível.

(2) Dado um percentual de retorno desejado, determinar a alocação x e o risco correspondente.

Inicialmente vamos verificar que retorno e risco da carteira também podem ser expressos somente em função de x, após serem estabelecidos retornos esperados, variância e covariância dos ativos.

Sejam $\alpha = E(R_1)$ e $\beta = E(R_2)$ os retornos esperados de EMPR1 e EMPR2, respectivamente. Para o risco precisamos das covariâncias c_{ij}, $1 \le i,j \le 2$, conforme (23). Os parâmetros de risco e retorno podem ser obtidos de atividades anteriores ou podem ser simplesmente fixados pelo professor.

Assim, de acordo com (16), o retorno esperado da carteira X pode ser expresso como a função afim

$$r(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \underbrace{(\alpha-\beta)}_{d}x + \underbrace{\beta}_{e} = dx + e, \quad x \in [0,1].$$

Já o risco da carteira é obtido pelo Teorema 1, donde:

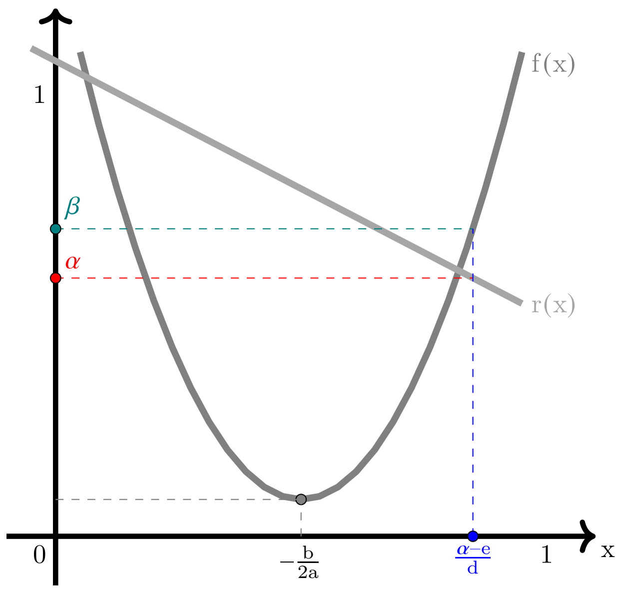
$$\begin{aligned}\sigma^2(x) &= c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\\ &= \underbrace{(c_{11}+c_{22}-2c_{12})}_{a}x^2 + \underbrace{2(c_{12}-c_{22})}_{b}\,x + \underbrace{c_{22}^2}_{c}\\ &= ax^2 + bx + c, \quad x \in [0,1].\end{aligned}$$

Portanto, temos a função quadrática $\sigma^2(x) = ax^2 + bx + c$ que modela o risco, e a função afim $r(x) = dx + e$, que representa o retorno.

De (18), temos $f(x) \geq 0$, para todo x.

O ponto de mínimo da função risco corresponde ao vértice da parábola, cuja abscissa é $x = -\dfrac{b}{2a}$. Dessa forma, a escolha x para a carteira (25) representa o investimento de menor risco, o que responde à primeira questão desta atividade.

Figura 11: Gráfico do risco e do retorno



Já para o item (2), se escolhemos um retorno $r(x) = \alpha$, que é atingindo com o percentual $x = \dfrac{\alpha - e}{d}$, teremos o risco correspondente dado por $f(x) = \beta = f\left(\dfrac{\alpha - e}{d}\right)$.

Para concluir, vejamos um caso particular dessa abordagem.

Exemplo 17. Um investidor aloca o percentual x de seu capital em ações da empresa A e $1-x$ em ações da empresa B. Sendo o risco do investimento modelado pela função quadrática $y = 2x^2 - x + 7$, a alocação do capital que corresponde ao menor risco é

(A) 75% na empresa A e 25% na empresa B.

(B) 100% na empresa A.

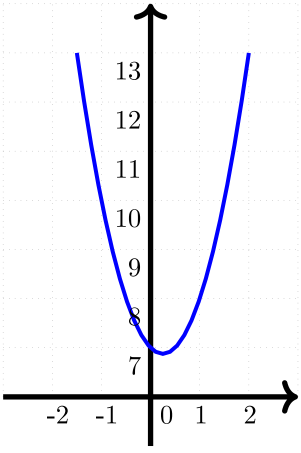
(C) 50% cada empresa.

(D) 25% na empresa A e 75% na empresa B.

(E) 40% na empresa A e 60% na empresa B.

A abscissa do vértice da parábola é $x = \frac{1}{4} = 25\%$. Portanto, para minimizar o risco, o investidor deve alocar 25% de seu investimento na empresa A e 75% na empresa B (alternativa D).

Figura 12: Gráfico da função $y = 2x^2 - x + 7$



4. Conclusões

Abordamos a Teoria do Portfólio utilizando matemática em nível de ensino médio. Conceitos fundamentais para os temas relacionados à Educação Financeira, como risco, retorno e retorno esperado, foram abordados e ilustrados em exemplos e propostas de aplicação no ensino. Isso reflete o caráter educativo do trabalho e a intenção de colaborar para que professores de matemática atuem na Educação Financeira explorando a natural relação entre os temas.

O texto esclarece algumas questões que potenciais investidores iniciantes, em geral, desconhecem. Neste sentido, podemos destacar dois aspectos importantes. O primeiro é como realizar um efetivo controle do retorno de uma carteira de investimentos, através da adequada contabilização dos proventos. O segundo é mostrar como a diversificação pode ser usada para reduzir certos tipos de riscos. Apesar do Método de Média Variância não ser tão simples de ser aplicado na prática, somente a consciência em não concentrar a carteira em ativos com retornos muito semelhantes já pode ajudar bastante.

Desejamos ter despertado o interesse para os aspectos matemáticos da Educação Financeira e motivado o natural aprofundamento diante de situações mais complexas e com o uso de matemática mais sofisticada. Por exemplo, usando otimização/programação linear para estender a Proposta 6 para uma maior quantidade de ativos.

Referências

[1] B3. *Perfil de Pessoas Físicas*. 2021. Disponível em l1nq.com/jkmlt. Acesso em: 1 de abril de 2022.

[2] Benninga, S. *Financial Modeling*. 4ª ed. Cambridge: The MIT Press, 2014.

[3] Bortoluzzo, M. *et al*, "Comparação do desempenho de carteiras utilizando os métodos paridade de risco, mínima variância e equal weighting: um estudo no mercado brasileiro em períodos pré, durante e pós a crise de 2008". *Revista Evidenciação Contábil e Finanças*, v.6, nº 3, p.36-53, 2018.

[4] Broverman, S. *Mathematics of Investment and Credit*. 5ª ed. Winsted: ACTEX Pub., 2010.

[5] Capinski, M. e Zastawniak, T. *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. London: Springer, 2006.

[6] Dario, R. P. e Silva, J. "Equações algébricas e decisão do melhor investimento". *Professor de Matemática Online*, v. 6, nº 1, p. 22-34, 2018. DOI: https://doi.org/10.21711/2319023X2018/pmo62.

[7] Dario, R. P. "Equações diofantinas e alocação otmizada de recursos de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro". *Revista Eletrônica da Matemática*, v. 8, nº 1, p. e3007, 2022. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5674.

[8] Dario, R. P., Gonçalves, J. L. e Jacob, M. L. A. "Estratégias de gestão de risco de investimentos". *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 8, nº 1, 2021. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2021.008.01.0408.

[9] Jacob, M, L, A. *Estratégias de gestão de risco de investimentos no Brasil durante a pandemia de Covid-19*. 45 p. Monografia (Mestrado) - UTFPR, Curitiba, 2021. Disponível em http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/24663.

[10] Hefez, A. *Aritmética*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[11] Kiyosaki, R. T. e Lechter, S. L. *Pai rico, pai pobre: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro*. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

[12] Marques, S. *et al*, "Comparação do desempenhos de carteiras otimizadas pelo modelo de Markowitz e a carteira de ações do Ibovespa". *Revista Evidenciação Contábil e Finanças*, v. 1, nº 1, p.20-53, 2013.

[13] Gonçalves, J. L., Dario, R. P. e Miranda, P. B. *Estratégias de gestão de carteiras de investimentos*. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2021.008.01.0407.

[14] Markowitz, H. "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, v. 7, nº 1, p. 77-91, 1952.

[15] Miranda, P. B. *Estratégias de gestão de carteiras de investimentos no mercado brasileiro*. 73 p. Monografia (Mestrado) - UTFPR, Curitiba, 2021. Disponível em http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/24662.

[16] Morettin, P. e Bussab, W. *Estatística Básica*. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

[17] Oliveira, F. N., Paula, E. L., "Determinando o grau ótimo de diversificação para investidores usuários de *home brokers*". *Revista Brasileira de Finanças*, v. 6, nº 3, p. 437–461, 2008.

[18] Ross, S. A., Westerfield, R. W., Jaffe, J. F., *Administração financeira*. São Paulo: Editora Atlas, 2015.

[19] Sirtoli, F. L. *A matemática básica na avaliação de investimento em ações: aplicações e propostas de ensino*. Monografia (Mestrado) - UTFPR, Curitiba, 2022. Disponível em http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29497.

[20] Ulrich, F. *Bitcoin - A Moeda na Era Digital*. São Paulo: Inst. Ludwig von Mises Brasil, 2014.

[21] Valor Investe, *Apenas 3% dos brasileiros investiram em ações em 2020 e média aplicada caiu 31%*. Disponível em: https://bityli.com/Edspqz. Acesso em: 11 de outubro de 2022.

Ronie P. Dario
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<ronie@utfpr.edu.br>

Felippe L. Sirtoli
Positivo Tecnologia S.A.
<felippesirtoli@gmail.com>

Hugo H. Bernardelli
Escola Israelita Brasileira Salomão Guelmann
<hbernardelli@gmail.com>

João L. Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<jlgoncalves@utfpr.edu.br>

Recebido: 24/10/2022
Publicado: 26/04/2023