PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.1, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1109

Um novo olhar sobre crescimento ou decrescimento percentual: valores negativos

Walfrido Campos   Thiago Yukio Tanaka   Airton Castro

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de discutir a temática dos crescimentos e decrescimentos percentuais quando as quantidades são negativas e generalizar o conceito usual para essa nova situação. Para tal finalidade, apresentaremos uma nova maneira de determinar a variação percentual (crescimento e/ou decrescimento) quando o valor inicial é um número negativo. Mostramos que essa nova definição recai na definição usual na condição de valor inicial positivo, sendo assim uma extensão desse conceito para um conjunto maior. Partindo dessa generalização, discutimos em detalhes como se comportam os casos de taxas sucessivas, propomos uma nova operação matemática para o cálculo sistemático dessas quantidades e estudamos as propriedades dessa nova operação. Como aplicação, discutimos o problema da anulação da taxa resultante envolvendo duas taxas. Fazemos essa análise em duas situações, conhecida a primeira taxa ou conhecida a segunda taxa, e mostramos que esses problemas são diferentes do problema usual, criando casos de não comutatividade, de inexistência e não unicidade de solução. Por fim, descreveremos como ficam as noções de juros compostos nessa nova abordagem.

Palavras-chave: Porcentagem; Crescimento/Decrescimento percentual com valores negativos; Taxas sucessivas; Anuladores de taxas.

Abstract

This work aims to discuss the theme of percentage increases and decreases when the quantities are negative and to generalize the usual concept for this new situation. For this purpose, we will present a new way to determine the percentage change (increase and/or decrease) when the initial value is a negative number. We show that this new definition coincides with the usual definition in the positive initial value condition, thus being an extension of this concept to a larger set. Starting from this generalization, we discuss in detail how the cases of successive rates behave, we propose a new mathematical operation for the systematic calculation of these quantities and we study the properties of this new operation. As an application, we discuss the netting rate problem involving two rates. We do this analysis in two situations, known the first rate or known the second rate, and we show that these problems are different from the usual problem, creating cases of non-commutativity, non-existence and non-uniqueness of solution. Finally, we will describe how the notions of compound interest are in this new approach.

Keywords: Percentage; Percentage growth/decrease with negative values; Successive fees; Fee cancellers.

1. Introdução

A Matemática auxilia-nos na modelagem de problemas de nosso cotidiano. Através do estudo desses modelos, conseguimos compreender como se dá a solução dos problemas ou mesmo determinar algumas características das soluções. Nesse sentido, apresentaremos dois contextos motivadores para o desenvolvimento deste trabalho.

Algumas empresas utilizam, como forma de avaliação, perguntas do tipo: "Em uma escala de 0 a 10, quanto você recomendaria a Empresa X ou um Produto Y para outra pessoa?" Essa pergunta faz parte de uma metodologia chamada de *Net Promoter Score (NPS)*. Ela busca, através de uma determinada pontuação, ter um panorama sobre a fidelidade dos seus clientes e quão satisfeitos estão com o que sua empresa oferece.

A partir dos resultados das pontuações dos entrevistados, reúnem-se os resultados em três grupos: os *detratores*, que são as pessoas que deram nota menor ou igual do que seis; as pessoas *passivas ou neutras*, que deram nota 7 ou 8; por fim, os *promotores*, cujas notas foram 9 ou 10. O cálculo do NPS então é feito da seguinte maneira:

$$NPS = \text{Porcentagem de Promotores} - \text{Porcentagem de Detratores}.$$

Essa escala pode então variar de -100% a $+100\%$. Podemos considerar a variação do NPS de -100 a 100 pontos ou de -10 a 10 pontos, por exemplo, cabendo à empresa decidir qual escala irá utilizar.

Em outra situação, observamos Ulã Bator, a maior cidade da Mongólia, que tem média térmica anual próxima de zero. O mês mais frio é janeiro, com média térmica de -22$^\circ C$, e o mais quente é julho, com média térmica de 18$^\circ C$. As temperaturas mínima e máxima recordes foram de -42$^\circ C$ e 39$^\circ C$ respectivamente.

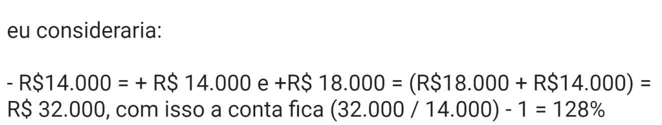
Figura 1: Imagem Panorâmica de Ulã Bator. Fonte: Wikipédia.

Com base nas pontuações da NPS e nas temperaturas da cidade de Ulã, de forma natural surgem algumas perguntas: "Se a pontuação de uma empresa saiu de -64 para -20, ela cresceu quantos por cento?" ou "Em certo dia na cidade de Ulã, a temperatura variou de -12$^\circ C$ para 10$^\circ C$, qual foi a variação percentual da temperatura?"

Nas duas situações acima, o cálculo do aumento percentual envolve quantidades negativas ou uma quantidade negativa e outra positiva, de modo que o cálculo usualmente utilizado para esta finalidade pode nos dar uma interpretação errônea do fato, gerando ambiguidade de interpretação. De fato, mostraremos que o cálculo tradicional para casos de valor inicial negativo associa aumentos com porcentagens negativas e descontos com porcentagens positivas.

O objetivo do nosso trabalho é oferecer uma abordagem do conceito de porcentagem envolvido em tais casos para que não haja ambiguidade ou incertezas em situações como as descritas, de modo que uma taxa positiva esteja sempre associada com um aumento e uma taxa negativa esteja sempre associada com uma redução. Além disso, veremos como comportam-se as taxas sucessivas (ex: aumento seguido por aumento) nessa abordagem e, para isso, definiremos a operação de taxas sucessivas e faremos comparações com a abordagem usual (com valor inicial positivo). De fato, provaremos que no caso usual essa operação é comutativa e na nova abordagem a operação não é comutativa. Por fim abordaremos o problema de anulação de taxas, que se apresentará como novo problema.

No início de nosso estudo, procuramos sobre a abordagem do tema em diversas literaturas. O intuito foi verificar se a problemática de crescimentos ou decrescimentos percentuais em que os valores inicial e/ou final são negativos, ou possuem sinais trocados, ou mesmo se um dos valores é nulo, já haviam sido abordados e/ou formalizados em livros ou artigos. Após análise de alguns livros didáticos comumente usados no Ensino Básico como (BALESTRI, 2016), (BARROSO, 2012), (DANTE, 2011), (IEZZI, HAZZAN, DEGENSZAJN, 2013) e (PAIVA, 2019), observamos que a abordagem do conteúdo de porcentagem é apenas aquela em que o valor inicial é sempre positivo ou quando as grandezas envolvidas não mudam de sinal. Buscamos então referências utilizadas no Ensino Superior tanto da Sociedade Brasileira de Matemática como (LAGES *et. al.*, 2006) quanto literaturas utilizadas nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral como (GUIDORIZZI, 1985) e (STEWART, 2013), e novamente não há nada relacionado com nosso tema. Indo além, procuramos nos informar se havia algo na BNCC de Matemática, (BRASIL, 2018) e nos PCNs do Ensino Básico (BRASIL, 1998), mas novamente não encontramos nenhum detalhamento. Por fim, investigamos artigos como (AMORIM, 2017), (CASTRO FILHO, 1995), (DANTAS, SOUZA, 2020), (DE SIQUEIRA *et. al.*, 2020), dissertações como (ALBUQUERQUE, 2014) e (WINCK, 2017), entre outros que estavam na plataforma do Google Acadêmico, mas que tratavam apenas do caso usual. Apesar de não encontrarmos nenhuma formalização ou discussão em livros ou artigos, encontramos questionamentos a tal problemática expostos em alguns *sites* e discussões de fóruns e com algumas propostas de respostas (ver [13, 15, 19]). Em [13] há uma breve explicação sobre como fazer o cálculo do que o autor chama de "aumento percentual de –20 para –25" e, nessa situação, o autor conclui que há um *aumento* de 25% e, claramente, percebemos que houve uma diminuição. Em [15], um grupo do *Google*, uma pessoa pergunta sobre uma situação hipotética de que se passe de –14000 para 18000 e joga os questionamentos: "quantos por cento subiu esse valor? Qual o seu delta (variação) percentual? Qual a fórmula para isso?". Após os questionamentos, dois participantes se propõem também a participar da discussão. O primeiro expôs:


eu consideraria:

- R$14.000 = + R$ 14.000 e +R$ 18.000 = (R$18.000 + R$14.000) =
R$ 32.000, com isso a conta fica (32.000 / 14.000) - 1 = 128%

Figura 2: Explicação do 1º participante. Fonte: [13].

o segundo afirmou:

No meu entender, acredito que a conta seria esta:

O delta calculado seria o módulo de -R$14.000 até +R$18.000 = R$32.000

O percentual de variação seria: (-R$14.000,00 - R$18.000,00)/R$14.000,00 = 228%

Figura 3: Explicação do 2º participante. Fonte: [15].

E como apresentado nas Figuras 2 e 3, estes autores propõem respostas para este caso particular, apresentando duas respostas diferentes e ambas com diversas inconsistências de notação. E por fim, em [19], um famoso fórum de exatas, há diretamente a pergunta: "*How to calculate the percentage of increase/decrease with negative numbers?*", que traduzida significa exatamente: "Como calcular o crescimento/diminuição percentual com números negativos?", e em sua pergunta ele indaga o que acontece (aumento/redução) em três situações, quando se passa:

- De $2,39$ para $1,79$;
- De $6,11$ para $-3,73$;
- De $-2,1$ para $0,6$.

E, novamente, alguns participantes expõem suas ideias, sendo a que teve mais votos positivos a que é representada pela Figura 4

Perhaps this "formula" will be easier to understand (this formula is equivalent to your formula - each can be derived from the other):

$$\frac{\text{original value} \;-\; \text{final value}}{\text{original value}} \times 100\% = \text{percent change}$$

That change will be

- an *increase* if the original value is *less than* the final value,
- a *decrease* if the original value is *greater than* the final value.

Original value 6.11, final value -3.73:

$$\frac{6.11-(-3.73)}{6.11} \times 100\% \approx 161\% \;\; \text{DECREASE}$$

Original value -2.1, final value 0.6:

$$\frac{-2.1-0.6}{-2.1} \times 100\% \approx 128.6\% \;\; \text{INCREASE}$$

Figura 4: Explicação do 1º participante. Fonte: [19].

Em resumo, o participante considera uma fórmula semelhante a usual para o cálculo de porcentagem considerando o quociente da variação dos valores na ordem inicial menos final sobre o valor inicial. Acreditamos que seja essa uma fórmula de certa forma "ruim", pois por meio dela, ao partirmos de um valor 10 e chegarmos em um valor 20, teremos um aumento de $\frac{10-20}{10}\times 100\% = -100\%$, isso significa que a expressão dada em [19] não retrata bem o caso usual. Então, sob o nosso ponto de vista, nenhuma das três abordagens apresenta-se como uma boa proposta de formalização para o tratamento do tema, trazendo ainda riscos de indução ao erro porque são expressões cujas quantidades não condizem ou com a realidade, no sentido se é um crescimento ou redução, ou em relação a notação usual, por exemplo, um aumento em módulo cujo valor percentual é negativo. Na primeira abordagem apresentada há a qualificação de um crescimento associado a uma porcentagem negativa, que na realidade é um decrescimento e, além disso, que quando trazida à notação usual, não condiz com a definição. A segunda discussão, apesar de propor boas respostas, não nos fornece explicações definitivas para esses questionamentos, por exemplo, seguindo a ideia de tratar grandezas negativas simplesmente utilizando o módulo como foi proposto, se a situação fosse de -14000 até -18000 ou 14000 até -18000 as respostas ainda seriam as mesmas, um erro grave. Por fim, a terceira discussão novamente traz uma proposta para o caso em questão, mas que não funciona bem no caso usual. Assim, até onde vai o nosso conhecimento, a proposta de formalização da extensão do conceito de crescimentos ou decrescimentos percentuais com valores negativos apresentada neste artigo é inédita, assim como todas as discussões consequentes que essa generalização traz quando estudamos as novas versões de composições sucessivas, composições anuladoras (como devem ser as duas taxas sucessivas para que a taxa resultante seja nula) e a noção de juros compostos (aplicação de uma quantidade natural de taxas sucessivas) nessa nova abordagem. Neste artigo então responderemos as seguintes perguntas:

- Como criar uma definição de crescimentos e decrescimentos percentuais para valores negativos ou valores com sinais opostos?
- Sob o ponto de vista matemático, ou seja, sob a perspectiva que essa nova definição recai no caso anterior nas condições do caso anterior, tal definição está bem posta?
- Como ficam as taxas sucessivas nessa nova abordagem? Que novas indagações matemáticas surgem?
- Dada uma primeira taxa, é possível determinar uma segunda taxa que anule a taxa resultante? Este problema tem unicidade?
- Dada uma segunda taxa, é possível determinar uma primeira taxa que anule a taxa resultante? Este problema tem unicidade?
- Como ficam as sucessões de uma mesma taxa quando aplicada uma quantidade natural de vezes?

Ao generalizarmos o conceito de crescimentos ou decrescimentos percentuais para números negativos, e apresentarmos respostas para todos os questionamentos acima, esperamos contribuir para a compreensão global do tema.

2. Conceitos Iniciais

Com o objetivo de formalizar as notações e relembrar conceitos já amplamente conhecidos de variação percentual (crescimento e/ou decrescimento), começaremos pela definição central sobre o tema.

Definição 1. Dados $A, B \in \mathbb{R}_+$, com valor inicial $A \neq 0$ e B o valor final, a taxa de variação $t_{A,B}$ indicará um crescimento se $A < B$, um decrescimento se $A > B$ e uma estabilidade se $A = B$, sendo expressa por:

$$t_{A,B} = \frac{B - A}{A}. \tag{1}$$

Desenvolvendo e reorganizando a expressão em (1) obtemos

$$B = A + t_{A,B}A = A(1 + t_{A,B}). \tag{2}$$

A expressão em (2), apesar de ser equivalente à (1), permite-nos observar rapidamente que qualquer um dos dados A, B e $t_{A,B}$ pode ser determinado, bastando conhecer os outros dois valores.

Veremos agora, a necessidade de estendermos o conceito para números negativos, com o exemplo a seguir.

Exemplo 1. Em uma situação hipotética, na cidade de Ulã Bator, foram registradas três medições de temperaturas em momentos distintos, dadas em graus Celsius, nessa ordem: $A = -20$, $B = -10$ e $C = 10$. Suponha que queiramos calcular a taxa de variação das temperaturas em Ulã Bator admitindo a aplicação da Definição 1 para valores negativos. Calcule $t_{A,B}$ e $t_{B,C}$.

Solução. Primeiramente, está claro que nessas situações há um aumento da temperatura inicial até a final, tanto de A para B quanto de B para C, portanto estamos em casos de crescimento na temperatura. (1).

$$t_{A,B} = \frac{B - A}{A} = \frac{-10 - (-20)}{-20} = \frac{10}{-20} = -50\%,$$

e

$$t_{B,C} = \frac{C - B}{B} = \frac{10 - (-10)}{-10} = \frac{20}{-10} = -200\%.$$

■

Observação 1. De modo similar, utilizando a variação das grandezas no sentido contrário, partindo de C para B e deste para A, certamente a temperatura final seria menor do que a inicial, portanto estaríamos no caso de diminuição; ainda assim, calculado $t_{C,B}$ e $t_{B,A}$ segundo (1), temos

$$t_{C,B} = \frac{-10 - 10}{10} = -200\% \quad \text{e} \quad t_{B,A} = \frac{-20 + 10}{-10} = 100\%.$$

Perceba que, apesar de em ambos os casos termos uma diminuição da temperatura, uma das taxas é positiva.

Para os casos como o explicitado no Exemplo 1, a Definição 1 pode gerar informações quantitativas que confrontam as ideias de aumento e redução no que diz respeito a sua aplicação em casos cujos valores de referência são negativos, uma vez que, por essa definição, ao passarmos de $-10°C$ para $10°C$ teríamos um aumento de $20°C$ associado à taxa negativa de -200% no valor da temperatura; da mesma forma, se tivéssemos passado de $-10°C$ para $-20°C$, teríamos reduzido $10°C$ na temperatura associada à taxa positiva de 100%.

A ideia de erro confronta a aplicação inadequada da Definição 1, e apesar de não estarem erradas podem induzir ao erro. Esse fato, na nossa visão, cria obstáculos para aprendizagem.

Dessa maneira, faz-se necessário estendermos o conceito proposto na Definição 1 para números negativos, e que seja uma definição que compatibilize o sinal da taxa com o crescimento ou decrescimentos das variáveis. Propomos então a seguinte extensão do conceito.

Definição 2. Dados $A, B \in \mathbb{R}$ com valor inicial $A \neq 0$ e valor final B, a taxa de variação de A para B é dada por:

$$t_{A,B} = \frac{B - A}{|A|}. \tag{3}$$

É fácil observar que a Definição 1 está generalizada pela Definição 2 para o caso em que A e B são números reais positivos com A não nulo. Um outro aspecto importante é que a nova definição compatibiliza o sinal da taxa com o crescimento ($t_{A,B} > 0 \Leftrightarrow A < B$), decrescimento ($t_{A,B} < 0 \Leftrightarrow A > B$) e estabilidade ($t_{A,B} = 0 \Leftrightarrow A = B$).

Como forma de verificação da nova proposta, vamos examinar o exemplo a seguir.

Exemplo 2. Uma empresa, no fechamento de suas faturas do ano em 2019, obteve um saldo positivo (lucro) de 40 milhões de reais. Em 2020, com influências provocadas pela pandemia do *Covid*-19, ela encerrou o ano com um saldo negativo (dívida) no valor de 30 milhões de reais. Já no ano de 2021, com uma recuperação parcial do mercado, a empresa conseguiu fechar ano com um saldo de −15 milhões. Determine as taxas de crescimento ou decrescimento do saldo do ano de 2019 para 2020; e de 2020 para 2021.

Solução. Salvo menção em contrário, passaremos a usar a Definição 2, pois a mesma generaliza a definição original, e nesse caso justifica-se, pois pelo menos um dos dados é negativo.

Na primeira transição de ano, considerando $A = 40$ e $B = -30$ (cuja unidade está em milhões), como $B < A$, está claro que estamos em uma situação de redução do saldo. Além disso,

$$t_{40,-30} = \frac{-30 - (40)}{|40|} = \frac{-70}{40} = -175\%.$$

Na segunda situação, como o valor final $C = -15$ é maior do que B, então estamos em uma situação de aumento percentual. Note que

$$t_{-30,-15} = \frac{-15 - (-30)}{|-30|} = \frac{15}{30} = 50\%.$$

■

No Exemplo 2 vemos que a definição está condizente com a situação em termos numéricos, uma vez que crescimentos estão associados com valores positivos da taxa e decrescimentos com valores negativos, portanto sem nenhum perigo de ambiguidade como nos casos do Exemplo 1.

Análoga à expressão obtida em (2), se desenvolvermos e simplificarmos a nova expressão dada em (3) vamos obter a seguinte expressão equivalente:

$$B = A + t_{A,B}|A| = |A|\left(\frac{A}{|A|} + t_{A,B}\right) = |A|(sinal(A) + t_{A,B}), \tag{4}$$

em que

$$A = |A|sinal(A), \tag{5}$$

e

$$sinal(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Novamente, como forma de verificação da nova proposta, vamos examinar o exemplo a seguir.

Exemplo 3. Uma empresa teve seu NPS avaliado através de um questionário e apresentou um resultado de -64 pontos em 2020. Após diversas melhorias na gestão, em 2021 eles esperavam ter uma melhor avaliação e almejaram atingir 40 pontos. Porém os números de 2021 não foram tão animadores e a empresa registrou um NPS de -12 pontos.

(a) Qual era o percentual de aumento almejado pela empresa?

(b) De quanto foi o aumento real de 2020 para 2021?

Solução. **(a)** Utilizando a expressão dada em (4) com $A = -64$ e $B = 40$, obtemos

$$40 = |-64|(sinal(-64) + t) \quad \Rightarrow \quad 40 = 64(-1 + t) \quad \Rightarrow \quad 0,625 = -1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1,625.$$

Portanto, o percentual de aumento esperado era de $162,5\%$

(b) Utilizando (3),

$$t_{-64,-12} = \frac{-12 - (-64)}{|-64|} = 81,25\%.$$

■

Diferente do Exemplo 2, no item (a) do Exemplo 3, o cálculo para obtermos o valor esperado não envolve apenas o sinal da taxa de crescimento, tem que levar em consideração também o sinal do valor inicial. Em virtude da expressão dada pela Definição 2 desconsiderar o sinal do valor de partida, tratando apenas do sinal da variação entre os valores final e inicial, a expressão dada pela equação (3) encerra a ambiguidade no tratamento dos dados, uma vez que taxas com valores positivos e negativos serão vistos como aumentos e descontos respectivamente.

3. Composições Sucessivas

Discutiremos agora como ficam as expressões de cálculos sucessivos de taxas. Antes, mais uma vez, entenderemos como os procedimentos funcionam a partir da abordagem usual.

Taxas sucessivas trazem-nos uma curiosidade interessante sobre operações entre taxas. Por exemplo, dois aumentos sucessivos de 10% não são equivalente a um único aumento de 20% e sim de 21%. De fato, se aumentarmos 10% em cima de um valor A, o valor final B será de

$$B = A(1 + 10\%) = A(1 + 0,1) = 1,1A,$$

cujo aumento sucessivo de outros 10% dar-nos-á um valor final C dado por

$$C = B(1 + 10\%) = 1,1B = 1,1(1,1A) = 1,1^2A = 1,21A = A(1 + 21\%).$$

A partir das duas expressões acima, concluímos que dois aumentos sucessivos de 10% são equivalentes a um único aumento de 21%. Analogamente, dois descontos sucessivos de 10% não correspondem a um único desconto de 20% e sim de 19%, o que nos diz que a operação de sucessividade de taxas não é algo simples. Por fim, é interessante notar que tanto um aumento seguido de desconto no valor de 10% quanto de um desconto seguido de um aumento de 10% correspondem a um único desconto de 1%, o que nos dá um indício de que a obtenção da taxa resultante de duas taxas sucessivas possui um sentido de comutatividade. Buscaremos formalizar essa operação de taxa resultante, a qual denotaremos por $\oplus$. Tal definição é bem posta pela seguinte proposição.

Proposição 1 (Taxas Sucessivas). *Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ taxas de crescimento (sinal positivo) ou decrescimento(sinal negativo) sobre valores positivos. A taxa resultante da aplicação sucessiva de t_1 e t_2 respectivamente, denotada por $t_1 \oplus t_2$, é dada por*

$$t_1 \oplus t_2 := t_1 + t_2 + t_1 t_2. \tag{7}$$

Solução. De fato, sejam A, B e C números positivos nos quais B e C são obtidos de A e B por uma taxa t_1 e t_2 respectivamente. Então temos as seguintes relações:

$$B = A(1 + t_1), \tag{8}$$

e

$$C = B(1 + t_2). \tag{9}$$

Combinando (8) e (9), obtemos

$$C = A(1 + t_1)(1 + t_2) = A(1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2). \tag{10}$$

□

Observação 2. É importante destacar que, nesse caso, não podemos considerar taxas negativas de modo que o valor final para B ou C sejam negativos.

Segue diretamente do fato de as operações usuais de soma e produto serem comutativas e associativas que a operação $\oplus$ dada pela expressão (7) é comutativa. De fato,

$$t_1 \oplus t_2 = t_1 + t_2 + t_1 t_2 = t_2 + t_1 + t_2 t_1 = t_2 \oplus t_1,$$

confirmando o que havíamos observado no início da seção. Mais ainda, é fácil perceber que essa operação é associativa, uma vez que

$$\begin{aligned}(t_1 \oplus t_2) \oplus t_3 &= (t_1 + t_2 + t_1 t_2) + t_3 + (t_1 + t_2 + t_1 t_2)t_3 \\ &= t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3 \\ &= t_1 + (t_2 + t_3 + t_2 t_3) + t_1(t_2 + t_3 + t_2 t_3) \\ &= t_1 \oplus (t_2 \oplus t_3).\end{aligned}$$

Vamos então às problemáticas que surgem quando trabalhamos com um valor inicial negativo.

Exemplo 4. Encontre o valor de $10\% \oplus 10\%$ utilizando a expressão dada em (7) quando o valor inicial é positivo. Suponha agora que queiramos calcular essa taxa resultante admitindo a aplicação da definição de taxa resultante dada pela Proposição 1 para valores negativos. Compare os dois valores obtidos.

Solução. Se o valor inicial é positivo, então estamos no caso usual, de modo que já calculamos esse valor, $10\% \oplus 10\% = 21\%$. Por outro lado, se agora o valor inicial A é negativo, isso significa que o valor de B será obtido combinando as expressões obtidas em (4) e (6), assim teremos:

$$B = |A|(sinal(A) + t_{A,B}) = |A|(-1 + 10\%) = |A|(-0,90) = -0,90|A|. \tag{11}$$

Agora, para obtermos o valor C a partir do valor B, que é negativo, utilizando (11) teremos:

$$C = |B|(sinal(B) + 10\%) = |-0,90|A||(-1 + 10\%) = 0,9|A|(-0,9) = -0,81|A|. \tag{12}$$

Agora, observe que se sairmos de A para C por meio de uma única taxa $t_{A,C}$, encontraremos esta taxa resolvendo a seguinte equação:

$$C = |A|(sinal(A) + t_{A,C}) = |A|(-1 + t_{A,C}). \tag{13}$$

Combinando (12) e (13), encontramos que $t_{A,C} = 19\%$. ∎

Com o Exemplo 4 percebemos que a notação da operação $\oplus$ tem uma limitação, uma vez que mostramos que $10\% \oplus 10\%$ pode ser igual a 21% ou 19% a depender se tivermos dois aumentos ou dois descontos, respectivamente. Entendendo a operação $\oplus$ como uma função $\oplus : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o comentário acima se traduz de modo que um mesmo elemento do domínio $(10, 10)$ possui duas imagens distintas, 19% e 21%, de modo que a operação não está bem definida.

Observe agora o seguinte exemplo.

Exemplo 5. Suponha que queiramos calcular a taxa resultante dada pela Proposição 1 admitindo valores iniciais negativos. Seja $A = -100$, $t_1 = 200\%$ e $t_2 = 400\%$. Perceba que

$$B = |A|(sinal(A) + t_{A,B}) = |-100|(-1 + 200\%) = 100(1) = 100.$$

Do mesmo modo, temos:

$$C = |B|(sinal(B) + t_{B,C}) = |100|(1 + 400\%) = 100(5) = 500.$$

Observe que partindo diretamente de A para C, temos

$$C = |A|(sinal(A) + t_{A,C}),$$

portanto, resolvendo a equação

$$|-100|(-1 + t_{A,C}) = 500,$$

obtemos $t_{A,C} = 600\%$. Façamos agora o cálculo análogo invertendo as ordens das taxas, ou seja, considerando primeiramente t_2 e, em seguida, t_1.

$$E = |A|(sinal(A) + t_{A,E}) = |-100|(-1 + 400\%) = 100(3) = 300.$$

Analogamente,

$$F = |E|(sinal(E) + t_{E,C}) = |300|(1 + 200\%) = 100(3) = 900.$$

Donde por fim, ao resolvermos a equação

$$G = |A|(sinal(A) + t_{A,G}),$$

obtemos $t_{A,G} = 1000\%$. ∎

No Exemplo 5 acima, percebemos que ao utilizarmos as taxas de 200% e 400%, o valor final obtido foi diferente, dependendo da ordem em que as taxas eram aplicadas (e apesar de já sabermos que nesse contexto nem uma operação temos) isso significa que a operação não é nem comutativa na nova abordagem! Assim, os dois exemplos apresentam-se como situações em que a operação $\oplus$ não se comporta bem quando consideramos o caso de valor inicial negativo. Para consideramos então este caso vamos definir a nova operação de taxas sucessivas por meio da seguinte proposição.

Proposição 2. *Sejam A, B e C números reais com A não nulo e $t_1 = t_{A,B}$ e $t_2 = t_{B,C}$.*

Se $A > 0$, a taxa resultante das taxas sucessivas t_1 e t_2 respectivamente, denotada por $(t_1 \oplus t_2)_+$, é dada por

$$(t_1 \oplus t_2)_+ := \begin{cases} t_1 + t_2 + t_1 t_2, & se\ t_1 > -1, \\ t_1 - t_2 - t_1 t_2, & se\ t_1 < -1, \\ -1, & se\ t_1 = -1. \end{cases} \tag{14}$$

Se $A < 0$, a taxa resultante será denotada por $(t_1 \oplus t_2)_-$ a qual é dada por

$$(t_1 \oplus t_2)_- := \begin{cases} t_1 - t_2 + t_1 t_2, & se\ t_1 > 1, \\ t_1 + t_2 - t_1 t_2, & se\ t_1 < 1, \\ 1, & se\ t_1 = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Solução. Perceba que após a aplicação sucessiva das taxas t_1 e t_2, teremos

$$C = |A| \cdot |sinal(A) + t_1| \cdot (sinal(sinal(A) + t_1) + t_2). \tag{16}$$

Note que, para determinar o valor da taxa resultante, precisaremos avaliar os valores de $sinal(A)$ e $sinal(sinal(A) + t_1)$.

Vamos começar analisando os casos em que a primeira taxa anula o resultado parcial (passaremos a chamar de caso degenerado), que corresponde aos casos $t_1 = -1$ em (14) e $t_1 = 1$ em (15).

No caso $A > 0$ se $t_1 = -1$, então o valor final após a primeira taxa é igual a zero, de forma que, independentemente de t_2, o valor final após as duas taxas ainda será nulo, portanto $(t_1 \oplus t_2)_+ = -1$.

O outro caso degenerado $A < 0$ e $t_1 = 1$ é análogo.

Os casos não degenerados são $t_1 \neq -1$ em (14) e $t_1 \neq 1$ em (15).

Para obtermos a segunda linha de (14), basta analisarmos o $sinal(1 + t_1)$, visto que já sabemos que $sinal(A) = 1$. Desse modo, o valor do $sinal(1 + t_1)$ é -1 se $1 + t_1 < 0$ e 1 caso contrário. Assim, assumindo que $t_1 < -1$ (o que equivale a $t_1 + 1 < 0$) por (16) teremos,

$$C = |A| \cdot |1 + t_1| \cdot (-1 + t_2) = |A|(-1 - t_1)(-1 + t_2) = |A|(1 + t_1 - t_2 - t_1 t_2).$$

Vamos agora obter a primeira linha de (15). Observando novamente (16), como o $sinal(A) = -1$, devemos considerar apenas o $sinal(-1 + t_1)$, que será -1, se $-1 + t_1 < 0$, ou 1, caso contrário. Assim, se $t_1 > 1$ (o que equivale a $(-1 + t_1) > 0$), então

$$C = |A| \cdot | - 1 + t_1| \cdot (1 + t_2) = |A|(-1 + t_1)(1 + t_2) = |A|(-1 + t_1 - t_2 + t_1 t_2).$$

Os demais casos seguem de maneira análoga. □

Faremos observações sobre possibilidade da comutatividade ou não da operação $(\cdot \oplus \cdot)_+$ e $(\cdot \oplus \cdot)_-$.

Para o caso $A > 0$, trocando t_1 por t_2 em (14), com $t_1 > -1$ e $t_2 > -1$, temos:

$$(t_1 \oplus t_2)_+ = t_1 + t_2 + t_1 t_2 = t_2 + t_1 + t_2 t_1 = (t_2 \oplus t_1)_+,$$

e a operação não é comutativa $(\cdot \oplus \cdot)_+$ nas demais situações. Por exemplo, na situação em que $t_1 = -1$, temos que $(t_1 \oplus t_2)_+ = -1$, porém

$$(t_2 \oplus (-1))_+ = \begin{cases} -1, & \text{se } t_2 > -1, \\ 2t_2 + 1, & \text{se } t_2 < -1, \\ -1, & \text{se } t_2 = -1. \end{cases} \tag{17}$$

Analisando o caso $A < 0$, ao permutarmos t_1 e t_2 em (15) se ambos t_1 e t_2 são menores do que 1, então

$$(t_1 \oplus t_2)_- = t_1 + t_2 - t_1 t_2 = t_2 + t_1 - t_2 t_1 = (t_2 \oplus t_1)_-,$$

e novamente, a operação não é comutativa nos demais casos. Vejamos alguns exemplos numéricos por meio da figura abaixo que é um recorte de uma tabela de valores criada no *software* livre do *LibreOffice Calc.* A tabela a seguir apresenta uma coluna com um determinado valor inicial positivo A, juntamente com outras duas colunas com os valores de duas taxas $T1$ e $T2$ que serão aplicadas de maneira sucessiva, cujos valores apresentam-se nas duas últimas colunas. Na tabela foram destacadas duas cores: Na cor vermelha estão os casos em que não há comutatividade, e na cor verde os casos em que há comutatividade das taxas.

Valor Inicial Positivo (A>0)				
Valor A	Taxa T1	Taxa T2	Valor Após Taxa T1	Valor Após as taxas T1 e T2
100	30%	50%	130,00	195,00
100	50%	30%	150,00	195,00
100	40%	120%	140,00	308,00
100	120%	40%	220,00	308,00
100	130%	150%	230,00	575,00
100	150%	130%	250,00	575,00
100	-30%	-50%	70,00	35,00
100	-50%	-30%	50,00	35,00
100	-40%	-120%	60,00	-12,00
100	-120%	-40%	-20,00	-28,00
100	-130%	-150%	-30,00	-75,00
100	-150%	-130%	-50,00	-115,00
100	-30%	50%	70,00	105,00
100	50%	-30%	150,00	105,00
100	-40%	120%	60,00	132,00
100	120%	-40%	220,00	132,00
100	40%	-120%	140,00	-28,00
100	-120%	40%	-20,00	-12,00
100	-130%	150%	-30,00	15,00
100	150%	-130%	250,00	-75,00

Figura 5: Recorte de uma tabela com os valores de duas taxas sucessivas e valor inicial positivo. Fonte: Autores.

Já a próxima tabela apresenta uma coluna com um determinado valor inicial negativo A juntamente com outras duas colunas com os valores de duas taxas $T1$ e $T2$, que serão aplicadas de maneira sucessiva, cujos valores apresentam-se nas duas últimas colunas. Na tabela foram destacadas duas cores: Na cor vermelha estão os casos em que não há comutatividade e na cor verde os casos em que há comutatividade das taxas.

Valor Inicial Negativo (A<0)				
Valor A	Taxa T1	Taxa T2	Valor Após Taxa T1	Valor Após as taxas T1 e T2
-100	30%	50%	-70,00	-35,00
-100	50%	30%	-50,00	-35,00
-100	40%	120%	-60,00	12,00
-100	120%	40%	20,00	28,00
-100	130%	150%	30,00	75,00
-100	150%	130%	50,00	115,00
-100	-30%	-50%	-130,00	-195,00
-100	-50%	-30%	-150,00	-195,00
-100	-40%	-120%	-140,00	-308,00
-100	-120%	-40%	-220,00	-308,00
-100	-130%	-150%	-230,00	-575,00
-100	-150%	-130%	-250,00	-575,00
-100	-30%	50%	-130,00	-65,00
-100	50%	-30%	-50,00	-65,00
-100	-40%	120%	-140,00	28,00
-100	120%	-40%	20,00	12,00
-100	40%	-120%	-60,00	-132,00
-100	-120%	40%	-220,00	-132,00
-100	-130%	150%	-230,00	115,00
-100	150%	-130%	50,00	-15,00

Figura 6: Recorte de uma tabela com os valores de duas taxas sucessivas e valor inicial negativo. Fonte: Autores

Como já dito, para montar as duas tabelas acima (e todas as demais do trabalho), utilizamos o *LibreOffice Calc*, que é um aplicativo gratuito que nos permitiu fazer verificações numéricas por meio da sistematização dos cálculos quando organizados por expressões matemáticas nas entradas dessas tabelas.

Note que ao compararmos alguns dos valores entre as duas tabelas acima, há casos em que que o valor final tem mesmo valor absoluto, porém, com sinais opostos, vemos que isso ocorre nas situações em que todos os sinais das variáveis estão trocados. Isso motivou a seguinte proposição.

Proposição 3. *Dados t_1 e t_2 números reais quaisquer, então*

$$(t_1 \oplus t_2)_- = -((-t_1) \oplus (-t_2))_+.$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três casos:

Se $t_1 = 1$ temos $(1 \oplus t_2)_- = 1$ e $((-1) \oplus (-t_2))_+ = -1$, verificando a identidade.

Se $t_1 < 1$, então $-t_1 > -1$, assim:

$$\begin{aligned} (t_1 \oplus t_2)_- &= t_1 + t_2 - t_1 t_2 \\ &= -(-t_1) - (-t_2) - (-t_1)(-t_2) \\ &= -[(-t_1) + (-t_2) + (-t_1)(-t_2)] \\ &= -((-t_1) \oplus (-t_2))_+. \end{aligned}$$

O caso $t_1 > 1$ é análogo. □

Observação 3. Perceba que a Proposição 3 dá-nos apenas uma igualdade entre as taxas, mas isso não ocorre para os valores finais após aplicadas essas taxas. Note que só faz sentido aplicar a taxa $-([-t_1] \oplus [t_2])_+$ em valores iniciais positivos, e a taxa $(t_1 \oplus t_2)_-$ em valores iniciais negativos.

Vejamos alguns exemplos numéricos por meio de outros recortes de tabelas também geradas no *Libre Office Calc* (construídas como as tabelas anteriores).

Valor Inicial Positivo (A>0)				
Valor A	Taxa T1	Taxa T2	Valor Após Taxa T1	Valor Após as taxas T1 e T2
100	-30%	-60%	70,00	28,00
100	-60%	-30%	40,00	28,00
100	-120%	-40%	-20,00	-28,00
100	-40%	-120%	60,00	-12,00
100	-130%	-300%	-30,00	-120,00
100	-300%	-130%	-200,00	-460,00
100	30%	-50%	130,00	65,00
100	-50%	30%	50,00	65,00
100	40%	-130%	140,00	-42,00
100	-130%	40%	-30,00	-18,00
100	120%	-50%	220,00	110,00
100	-50%	120%	50,00	110,00
100	110%	230%	210,00	693,00
100	230%	110%	330,00	693,00

Figura 7: Recorte da uma tabela com os valores de duas taxas sucessivas e valor inicial positivo. Fonte: Autores.

e quando trocamos os sinais de todas os valores das entradas, teremos

Valor Inicial Negativo (A<0)				
Valor A	Taxa T1	Taxa T2	Valor Após Taxa T1	Valor Após as taxas T1 e T2
-100	30%	60%	-70,00	-28,00
-100	60%	30%	-40,00	-28,00
-100	120%	40%	20,00	28,00
-100	40%	120%	-60,00	12,00
-100	130%	300%	30,00	120,00
-100	300%	130%	200,00	460,00
-100	-30%	50%	-130,00	-65,00
-100	50%	-30%	-50,00	-65,00
-100	-40%	130%	-140,00	42,00
-100	130%	-40%	30,00	18,00
-100	-120%	50%	-220,00	-110,00
-100	50%	-120%	-50,00	-110,00
-100	-110%	-230%	-210,00	-693,00
-100	-230%	-110%	-330,00	-693,00

Figura 8: Recorte da uma tabela com os valores de duas taxas sucessivas e valor inicial negativo. Fonte: Autores.

4. Aplicações: Taxa Resultante Nula e Juros Compostos

Nesta seção, trataremos dos dois problemas cujos temas dão nome a esta seção e que estão diretamente relacionados com questões de taxas sucessivas.

Um caso corriqueiro e que todas as vezes nos induzem a um pensamento errôneo são as questões de aumentos seguidos de descontos como a famosa expressão "Tudo pela metade do dobro do preço". Observe que se um produto custar x ao dobrar de preço custará $2x$. Se agora custar metade do novo valor, ela custará $2x/2 = x$, voltando assim ao preço original.

Perceba que na situação descrita acima há um aumento de $t_1 = 100\%$ seguido de um desconto de $t_2 = 50\%$, e nessa situação $100\% \oplus (-50\%) = 0$. O mesmo ocorre quando, a partir de um desconto de 50%, aumentamos em 100% esse valor, de modo que $-50\% \oplus 100\% = 0$. Mas já vimos na seção anterior, por meio da Observação 2, que a operação de taxas sucessivas não é comutativa, então buscaremos por soluções para os seguintes problemas:

Para $A \neq 0$ e dada uma taxa t. Determine o valor da taxa s tal que

$$(t \oplus s)_{\pm} = 0 \quad \text{e} \quad (s \oplus t)_{\pm} = 0.$$

Antes vamos nos situar em relação ao problema. Chamaremos de *anulador* a taxa que "desfaz" o que a primeira taxa fez, ou seja, anulador é a nova taxa que deve ser dada para que voltemos a ter o valor inicial, após ter sido aplicada a primeira taxa. Desse modo, estamos interessados em encontrar a relação entre t e s tal que dado $A \neq 0$ obtenhamos a seguinte cadeia $A \xrightarrow{t} B \xrightarrow{s} A$, cuja primeira seta representa uma aplicação da taxa t no valor A, obtendo o valor B, e uma conclusão análoga para a segunda seta.

A proposição a seguir dá-nos a relação entre as taxas.

Proposição 4. *Para $t, s \in \mathbb{R}$:*

$$(t \oplus s)_{+} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot |1 + t| = -t.$$

Demonstração. Da fórmula (14) temos $(-1 \oplus s)_{+} = -1$, logo nunca teremos $(-1 \oplus s)_{+} = 0$, que é compatível com o resultado da Proposição 4 , pois $s \cdot |1 - 1| = 0 \neq -(-1)$.
Se $A > 0$ e $t = -1$ então $B = |A|(t + sinal(A)) = A(1 - 1) = 0$, ou seja, $A \xrightarrow{-100\%} 0$, e, chegando no zero, não é possível retornar para o valor inicial $A \neq 0$; assim basta fazer o caso $t \neq -1$

Utilizando o esquema $A \xrightarrow{t} B \xrightarrow{s} A$, aproveitando os cálculos já realizados em (16), temos que

$$A = |A| \cdot |(t + sinal(A))| \cdot (s + sinal(t + sinal(A))).$$

Como $A > 0$, temos que $|A| = A$ e $sinal(A) = 1$,

$$A = A \cdot |t + 1| \cdot (s + sinal(t + 1)),$$

usando a fórmula (5) temos $sinal(t + 1)|t + 1| = t + 1$,

$$\frac{A}{A} = |t + 1| \cdot s + (t + 1).$$

Logo

$$(t \oplus s)_+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = s \cdot |t+1| + t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot |1+t| = -t$$

□

A Proposição 4 prova que o conjunto solução da equação $(t \oplus s)_+ = 0$ é dado pela função $s = \frac{-t}{|t+1|}$, cujo domínio é $\mathbb{R} - \{-1\}$ e cujo gráfico é apresentado na Figura 9.

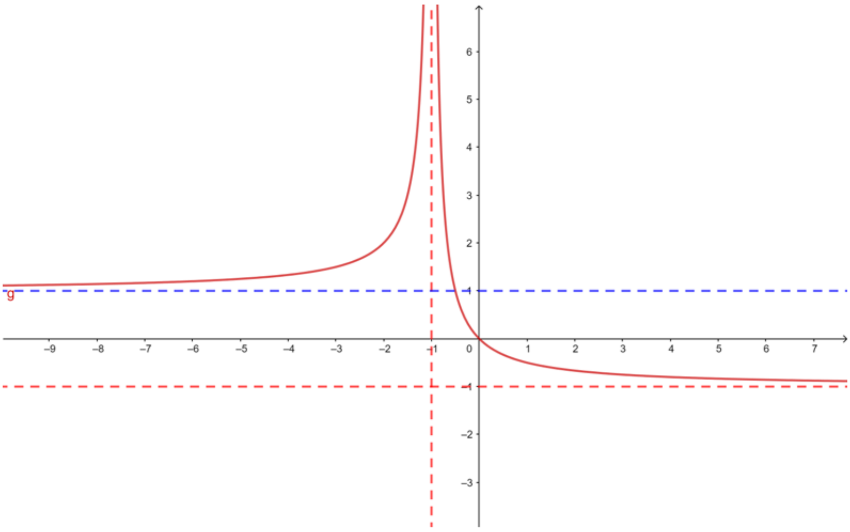


Figura 9: Gráfico da curva $s = -\frac{t}{|1+t|}$. Fonte: Autores.

Como o domínio da função s é $\mathbb{R} - \{-1\}$, temos que sempre é possível determinar um anulador s para uma dada taxa $t \neq -1$.

Vejamos alguns exemplos de anuladores por meio do seguinte recorte de uma tabela criada no *Libre Office Calc*.

Valor Inicial Positivo (A>0)				
Valor A	Taxa T1	Valor Após Taxa T1	Taxa T2 obtida pela fórmula	Valor Após as taxas T1 e T2
100	-900%	-800,00	113%	100,00
100	50%	150,00	-33%	100,00
100	120%	220,00	-55%	100,00
100	40%	140,00	-29%	100,00
100	130%	230,00	-57%	100,00
100	300%	400,00	-75%	100,00
100	-30%	70,00	43%	100,00
100	50%	150,00	-33%	100,00
100	-40%	60,00	67%	100,00
100	130%	230,00	-57%	100,00
100	-120%	-20,00	600%	100,00
100	50%	150,00	-33%	100,00
100	-110%	-10,00	1100%	100,00
100	-230%	-130,00	177%	100,00
100	- 2/3	33,33	200%	100,00
100	-200%	-100,00	200%	100,00

Figura 10: Recorte de uma tabela com anuladores para valores iniciais positivos. Fonte: Autores.

Proposição 5. *Para* $t, s \in \mathbb{R}$*:*

$$(t \oplus s)_- = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad s \cdot |1-t| = -t.$$

Demonstração. Da fórmula (15) temos $(1 \oplus s)_- = 1$, logo nunca teremos $(1 \oplus s)_- = 0$, que é compatível com o resultado da Proposição 5 , pois $s \cdot |1-1| = 0 \neq -1$.

Uma vez que a Proposição 4 foi provada, utilizando a Proposição 3, temos

$(t \oplus s)_- = -([-t] \oplus [-s])_+$ logo $-([-t] \oplus [-s])_+ = 0 \Leftrightarrow -s \cdot |1-t| = -(-t).$, que demonstra a proposição. $\square$

Novamente, podemos interpretar a solução por meio da análise da função $s = \frac{-t}{|1-t|}$ com domínio $\mathbb{R} - \{1\}$, cujo gráfico está apresentado na Figura 11.

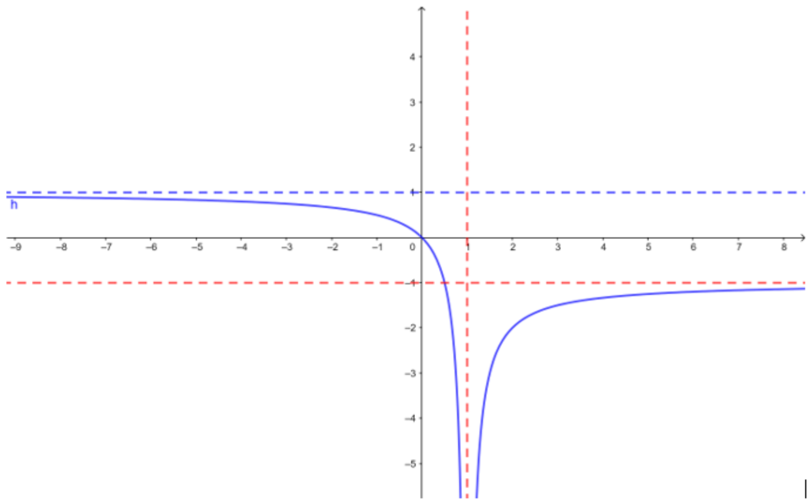


Figura 11: Gráfico da curva $s = \frac{-t}{|1-t|}$. Fonte: Autores.

Observando o gráfico, percebemos que a função é definida para todo $t \in \mathbb{R} - \{1\}$, isso significa que sempre há uma solução s para t diferente de um. A figura a seguir contém novamente um recorte de uma tabela contendo alguns exemplos numéricos

Valor Inicial Negativo (A<0)				
Valor A	**Taxa T1**	**Valor Após Taxa T1**	**Taxa T2 obtida pela fórmula**	**Valor Após as taxas T1 e T2**
-100	-900%	-1000,00	90%	-100,00
-100	50%	-50,00	-100%	-100,00
-100	120%	20,00	-600%	-100,00
-100	40%	-60,00	-67%	-100,00
-100	130%	30,00	-433%	-100,00
-100	300%	200,00	-150%	-100,00
-100	-30%	-130,00	23%	-100,00
-100	50%	-50,00	-100%	-100,00
-100	-40%	-140,00	29%	-100,00
-100	130%	30,00	-433%	-100,00
-100	-120%	-220,00	55%	-100,00
-100	50%	-50,00	-100%	-100,00
-100	-110%	-210,00	52%	-100,00
-100	-230%	-330,00	70%	-100,00
-100	- 2/3	-166,67	40%	-100,00
-100	-200%	-300,00	67%	-100,00

Figura 12: Recorte de uma tabela com anuladores para valores iniciais negativos. Fonte: Autores.

Com os resultados das Proposições 4 e 5 provamos que os problemas $(t \oplus s)_{\pm}$ para $A \neq 0$ e t uma taxa dada (retirando-se os casos degenerados) sempre admite um anulado s (existência), e esse anulador é único (unicidade).

Indo adiante, estudaremos o problema análogo, mas o dado conhecido é o da segunda taxa. Veremos que este problema, apesar de ter estrutura semelhante ao anterior, é bem diferente tanto do caso usual (cuja solução seria apenas trocar as ordem das taxas) quanto dos resultados dados pelas Proposições 4 e 5, uma vez que esse problema pode não admitir solução ou mesmo não admitir unicidade.

Proposição 6. *Dado $s \in \mathbb{R}$. Seja S o conjunto solução da equação $(t \oplus s)_+ = 0$ então*

(i) *Se $s \leq -1$, então $S = \emptyset$;*

(ii) *Se $-1 < s \leq 1$ então $S = \{t_1\}$ com $t_1 = -\dfrac{s}{s+1}$;*

(iii) *Se $s > 1$ então $S = \{t_1, t_2\}$ com $t_2 = \dfrac{s}{1-s} < t_1 = -\dfrac{s}{s+1}$.*

Demonstração. Vamos precisar resolver a equação $s \cdot |1+t| = -t$ para dado valor de s. Note primeiro que o $sinal(t) = -sinal(s)$, já sabemos que não há solução no caso $t \neq -1$.

Para $s \leq -1$, em particular temos $s < 0$, logo $t > 0$ e consequentemente

$$|1+t| = 1+t, \quad |s| = -s = \frac{t}{1+t} < 1$$

logo $s > -1$, contrariando a hipótese que $s \leq -1$, mostrando que no caso $s \leq -1$ temos $S = \emptyset$, provando **(i)**

Basta procurar as soluções no caso $s > -1$, como $t \neq -1$ vamos separar em dois casos.

Caso 1. $(t > -1 \Leftrightarrow sinal(t+1) = 1)$.

Nesse caso $|t+1| = t+1$. Assim temos:

$$s \cdot (1+t) = -t \quad \Leftrightarrow \quad st + t = -s \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{s}{1+s}$$

Usando que $s+1 > 0$ e, impondo que $-\frac{s}{s+1} = t > -1$ temos $s < s+1$, que é sempre verdade $(0 < 1)$; dessa forma, se $s > -1$, então $t = -\frac{s}{1+s}$ é uma solução que respeita a condição que $t > 1$.

Caso 2. $(t < -1 \Leftrightarrow sinal(t+1) = -1)$.

Nesse caso $|t+1| = -(t+1)$, temos,

$$s = -\frac{t}{|1+t|} = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

Como $t < -1$ temos $-(1+t) > 0$ logo $s > 1$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - s \quad \Leftrightarrow \quad t+1 = \frac{1}{1-s} \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 + \frac{1}{1-s} = \frac{s}{1-s}.$$

Para $s > 1$, temos $1 - s < 0$, nessas condições temos $t < -1$.

Resumindo provamos que dado s, as soluções de $(t \oplus s)_+ = 0$ são de dois tipos:

- $t_1 = -\dfrac{s}{1+s}$ com $s > -1$;
- $t_2 = \dfrac{s}{1-s}$ com $s > 1$.

Dessa forma, para $-1 < s \leq 1$, temos apenas a solução $t_1 = -\frac{s}{1+s}$, o que demostra **(ii)**.

Para $s > 1$ temos duas soluções para a equação; observe que $s+1 > s-1 > 0$, logo $\frac{1}{s+1} < \frac{1}{s-1}$, como $-s < -1 < 0$ temos:

$$t_2 = -\frac{s}{s-1} < -\frac{s}{s+1} = t_1,$$

o que demostra **(iii)**.

A Proposição 6 mostra-nos que, conhecido s, o conjunto solução da equação $(t \oplus s)_+ = 0$ é dado pelas curvas $t = -\frac{s}{1+s}$ e $t = \frac{s}{1-s}$, podendo não admitir solução quando $s < -1$, admitir uma única solução se $-1 < s \leq 1$ e admitir duas soluções se $s > 1$, como apresentado na Figura 13.

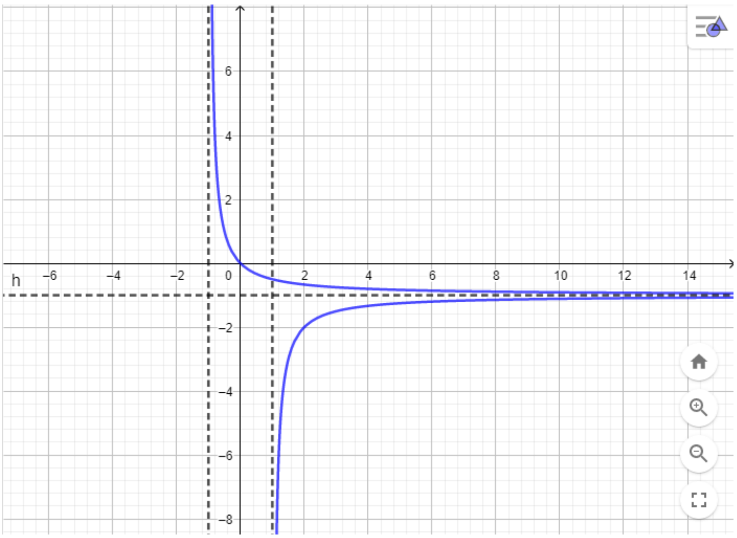


Figura 13: Curvas soluções para t em relação ao parâmetro s da Proposição 6. Fonte: Autores.

■

De maneira análoga aos procedimentos que fizemos na Proposição 6, pode ser demonstrado o seguinte resultado.

Proposição 7. *Dado $s \in \mathbb{R}$. Seja S o conjunto solução da equação $(t \oplus s)_- = 0$ então*

(i) *Se $s \geq 1$, então $S = \emptyset$.*

(ii) *Se $-1 \leq s < 1$ então $S = \{t_3\}$ com $t_3 = \dfrac{s}{s-1}$.*

(iii) *Se $s < -1$ então $S = \{t_3, t_4\}$ com $t_3 = \dfrac{s}{s-1} < t_4 = \dfrac{s}{1+s}$.*

Por fim, a Proposição 7 mostra-nos que, conhecido s, o conjunto solução da equação $(t \oplus s)_- = 0$ é dado pelas curvas $t = \frac{s}{s-1}$ e $t = \frac{s}{1+s}$, podendo não admitir solução quando $s \geq -1$, admitir uma única solução se $-1 \leq s < 1$ e admitir duas soluções se $s \leq -1$. Nessa situação a curva solução associada é dada pela Figura 14.

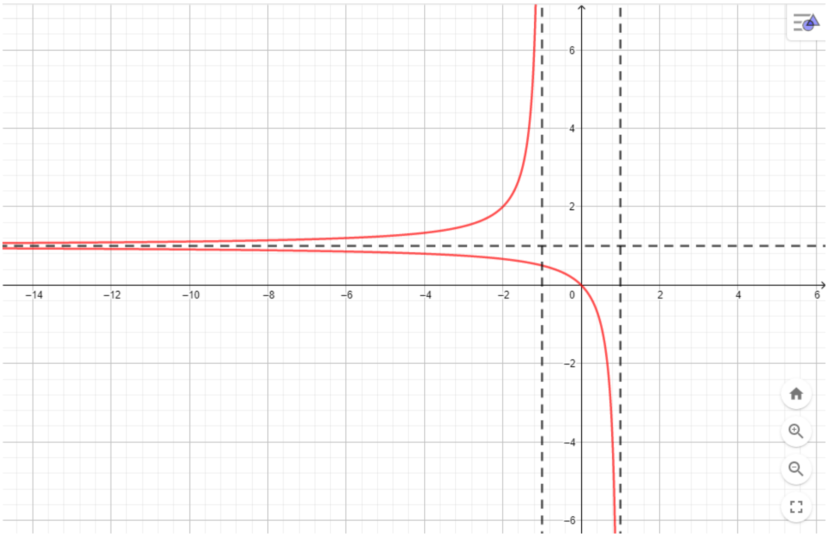


Figura 14: Curvas soluções para t em relação ao parâmetro s da Proposição 7. Fonte: Autores.

Vimos que as Proposições 6 e 7 trazem novas perspectivas ao problema das taxas anuladoras pois, diferente do caso usual no qual os resultados das Proposições 4, 5, 6 e 7 tratam de um mesmo problema, agora, na nova abordagem, o problema de encontrar uma primeira taxa anuladora dada uma segunda taxa, além de ser diferente do problema dada uma primeira taxa encontrar a taxa anuladora sendo a segunda, vemos que esse novo problema pode não ter solução, pode ter uma única solução e, completamente diferente de todos os casos anteriores, pode admitir duas soluções, sendo um problema que gera casos de inexistência e não unicidade de solução, um resultado bastante inesperado quando comparado ao caso usual.

Por fim, uma outra questão a destacar é quando as taxas sucessivas possuem sempre o mesmo valor. Essa noção remete-nos à ideia da expressão para juros compostos. Este resultado é dado pela seguinte proposição

Proposição 8. *Seja M o montante resultante de n aplicações sucessivas de uma taxa $t \in \mathbb{R}$ sobre* *um valor inicial $A \in \mathbb{R}$, denotado por $M(A,t,n)$, então*

$$M(A,t,n) := \begin{cases} A(1+t)(1-t)^{n-1}, & se\ A > 0\ e\ t < -1, \\ 0, & se\ A > 0\ e\ t = -1, \\ A(1+t)^n, & se\ A > 0\ e\ t > -1, \\ 0, & se\ A = 0, \\ A(1-t)(1+t)^{n-1}, & se\ A < 0\ e\ t > 1, \\ 0, & se\ A < 0\ e\ t = 1, \\ A(1-t)^n, & se\ A < 0\ e\ t < 1. \end{cases} \tag{18}$$

A ideia por trás da demonstração desse resultado consiste em utilizar sucessivas vezes a expressão dada em (4) ao considerarmos a cadeia $A \xrightarrow{t} A_1 \xrightarrow{t} A_2 \xrightarrow{t} \cdots \xrightarrow{t} A_{n-1} \xrightarrow{t} A_n = M(A,t,n)$. Em seguida, utiliza-se indução para provar que tais expressões são válidas em $\mathbb{N}$.

Perceba que a expressão dada em (18) também generaliza a nossa conhecida fórmula para juros compostos, a qual está incluída na terceira linha de (18).

Exemplo 6. Uma empresa apresentou, no ano de 2021, um prejuízo de 20 mil reais. Com a reabertura das atividades econômicas, ela projeta um crescimento anual de 10% em seu faturamento. Desse modo, pergunta-se:

(a) Após quantos anos a empresa terá um saldo de 10 mil reais negativos?

(b) Com essa projeção anual de crescimento, essa empresa passará a ter lucro?

(c) Admitindo um crescimento inicial de 110% e, após isso, crescimentos anuais de 5%, após quantos anos a empresa terá saldo de 20 mil reais?

Solução. Observe que, inicialmente, a empresa apresentou um prejuízo de 20 mil reais, ou seja, temos um valor inicial de -20 mil reais. Como ela prevê um crescimento percentual anual de 10%, estamos diante de uma questão de aumento sobre aumento com a taxa constante, ou seja, juros compostos.

(a) Pela nossa proposta, temos: valor inicial $A = -20$, taxa anual de $t = 10\%$ o que caracteriza estarmos na linha 6 de (18); além disso, queremos obter o valor de n para um montante $M = -10$. Portanto, teremos

$$M = A(1-t)^n \quad \Rightarrow \quad -10 = -20(1-0,10)^n \quad \Rightarrow \quad 0,50 = (0,90)^n \quad \Rightarrow \quad n \approx 6,579,$$

ou seja, aproximadamente 6 anos e 7 meses.

(b) Analisando a equação $M = A(1-t)^n$, observamos que esse resultado nunca será positivo para $A < 0$ e $t < 1$, o que significa dizer que essa empresa sempre terá saldo negativo para crescimentos inferiores a 100%. Chegamos à conclusão de que para deixar de estar endividada a empresa, em algum momento, deverá crescer, necessariamente, mais que 100%.

(c) Diante do exposto na letra (b), e com um crescimento inicial de 110%, teremos

$$M = -20(1 - 1,10)^1 = 2.$$

Assim, após o primeiro ano, a empresa apresentará um saldo positivo de 2 mil reais. Note que, se o aumento fosse de 100%, a empresa não teria lucro e nem prejuízo. E partindo do zero, não existirá mais como medirmos crescimento e nem decrescimento percentual. A partir desse primeiro aumento, teremos aumentos de 5% ao ano e queremos chegar a ter um saldo de 20 mil reais. Assim, estamos com $A > 0$, $t < 1$ e $M = 20$. Logo, de acordo com a proposta estamos na linha 3 de (18), assim

$$20 = 2(1 + 0,05)^n \quad \Rightarrow \quad 10 = (1,05)^n \quad \Rightarrow \quad n \approx 47,19,$$

que é aproximadamente 47 anos, com mais um ano do crescimento inicial, totalizando um pouco mais de 48 anos. ∎

Observação 4. É muito interessante notar que uma empresa ou um país que apresenta saldo inicial positivo e tem uma queda abrupta em seu faturamento ou em seu PIB, na inflação, gerando um valor negativo, necessariamente teve uma queda maior que 100%. Da mesma forma que ao passarmos de um valor negativo para um valor positivo, obrigatoriamente, tivemos um aumento maior que 100%.

5. Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos a problemática que surge quando consideramos como valor inicial grandezas negativas no cálculo de crescimento ou decrescimento percentual. Trouxemos a perspectiva do tema por meio de três situações concretas: pontuações do *Net Promoter Score* (*NPS*) que é uma métrica bastante utilizada para avaliar a satisfação do cliente frente a um produto ou serviço; uma situação envolvendo médias térmicas de uma cidade com temperatura média anual próxima a zero grau Celsius, a Ulã Bator; finalmente por uma abordagem que trata do caso de endividamento de empresas. Partindo da definição usual do cálculo de taxas, construímos uma nova definição que amplia a definição original, quando consideramos valores negativos ou mesmo quando partindo de um valor positivo obtemos um valor final negativo, e com essa primeira noção, justificamos que a definição de fato generaliza a anterior, no sentido de que sob as mesmas circunstâncias as definições são indistinguíveis, e que ela permite uma melhor compreensão por associar noções de crescimento e decrescimento com taxas positivas e negativas, respectivamente. Uma indagação natural apresentada e respondida por nós, nessa nova abordagem, foi explicar como são as novas noções de taxas sucessivas. Para responder a esses questionamento, fomos levados a considerar duas novas definições que explicam como funcionam as taxas sucessivas no caso usual e quando consideramos valores iniciais negativos. Além de apresentarmos todas as noções envolvidas por essas novas definições como propriedades computacionais (cálculos envolvidos para suas obtenções) e operacionais (de comutatividade ou não e associatividade ou não). Ainda sob a perspectiva de taxas sucessivas, buscamos responder a versão generalizada do problema de anulação da taxa resultante. Mostramos que no caso usual esse problema é simples sob o ponto de vista operacional, e que na nossa notação verificamos que dada uma taxa sempre existe uma taxa (que depende dessa taxa inicial) tal que a taxa resultante (independentemente da ordem em que são feitos os cálculos) dá-nos uma taxa nula. Porém, na nova abordagem vimos que isso não ocorre. A saber o problema dada uma primeira taxa, descobrir a segunda taxa para que a taxa resultante seja nula, e dada uma segunda taxa, descobrir qual a primeira taxa cuja taxa resultante seja nula são dois problemas com particularidades distintas, e isso ocorre mesmo quando o valor inicial é positivo. Por fim, procuramos responder e exemplificar a questão de aplicação de uma mesma taxa uma quantidade natural de vezes, o que nos generaliza a noção de juros compostos nessa nova abordagem. Propusemos uma expressão para esse novo cálculo, o qual generaliza a noção de juros compostos do caso usual. Acreditamos que, com essa generalização e formalização, contribuímos para um melhor entendimento sobre o assunto de porcentagem.

Referências

[1] ALBUQUERQUE, O. D. O desempenho de alunos do ensino médio em questões de porcentagem. Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat - Universidade Federal do Pará, 2014.

[2] AMORIM, Vitor. O ensino de matemática financeira: do livro didático ao mundo real. Disponível em: https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_O-ensino-de-Matematica-Financeira.pdf Acessado em 01/07/2121

[3] BALESTRI, Rodrigo. *Matemática – Interação e tecnologia.* v. 2, Editora: Leya, São Paulo 2ª ed., 2016

[4] BARROSO, Juliane Matsubara. *Conexões com a Matemática.* v. único, Editora: Moderna, São Paulo, 2ª ed., 2012

[5] BRASIL. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Matemática – Primeiro e Segundo Ciclos. Secretaria de Ministério Educação: Brasília, 1998.

[6] BRASIL. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Matemática – Terceiro e Quarto Ciclos. Secretaria de Ministério Educação: Brasília, 1998

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. BNCC. Secretaria de Educação Básica: Brasília, 2018.

[8] CASTRO FILHO, José Alves de. A porcentagem no contexto escolar: estratégias utilizadas pelos alunos. Temas psicol., Ribeirão Preto, v.3, n° 1, p.33-45, abr. 1995. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X1995000100005 Acessado em 01/07/2020

[9] DANTAS, Juliana Medeiros; SOUZA, Raquel Aparecida. A Peer Instruction como proposta metodológica no ensino de porcentagem, p. 1-388-416. DOI 10.22533/at.ed.9862026107

[10] DANTAS, Marcela. SÍMBOLO de Porcentagem, 30 nov. 2019. Disponível em: https://profissaomestre.com.br/simbolo-de-porcentagem/.Acessoem:6out.2021.

[11] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática - Contexto e aplicações.* v. único, Editora: Ática, São Paulo, 3ª ed., 2011

[12] DE SIQUEIRA, Elexlhane Guimarães Damasceno *et al.* Aplicando conceitos de porcentagem. Aplicando conceitos de porcentagem p. 1-388-416. DOI 10.22533/at.ed.9862026109

[13] eHow Brasil: Como calcular aumentos percentuais de um valor negativo. Disponível em: ⟨https://www.ehow.com.br/calcular-aumentos-percentuais-negativo-como_336968/⟩. Acesso em 14 de fev. 2023.

[14] FERREIRA, Fernando Michael da Costa. Uma análise na resolução de problemas que envolvem o cálculo de porcentagem em questões do livro didático e da Obmep. 2016.

[15] Grupos *Google*: clubedosengenheiroscivis - Cálculo percentual. Disponível em: ⟨https://groups.google.com/g/clubedosengenheiroscivis/c/GkKT1qjrxlo?pli=1/⟩. Acesso em 14 de fev. 2023.

[16] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo*. Volume 1. 5ª ed. São Paulo: LTC, 1995.

[17] IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. *Fundamentos de Matemática Elementar*. v. 11, Editora: Atual, São Paulo, 2ª ed., 2013.

[18] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Temas e problemas elementares – SBM. 12ª edição; Rio de janeiro, 2006

[19] *Math Stackexchange: How to calculate the percentage of increase/decrease with negative numbers?* Disponível em: ⟨https://math.stackexchange.com/questions/716767/how-to-calculate-the-percentage-of-increase-decrease-with-negative-numbers/⟩. Acesso em 14 de fev. 2023.

[20] PAIVA, Manoel. *Matemática Moderna Plus*. v. único, Editora: Moderna, São Paulo, 3ª ed., 2019

[21] STEWART, J. *Cálculo: volume 1*, 7ª edição, Thomson, 2013.

[22] WINCK, Gracielle Cristina. Trabalhando com Porcentagem e Juros Simples no Ensino Médio: Uma Experiência Contextualizada e Realizada em Sala de Aula. Dissertação de Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2017.

Walfrido Campos
Instituto Federal da Paraíba
Departamento de Matemática (IFPB)
João Pessoa/PB
<walfridocampos@gmail.com>

Thiago Yukio Tanaka
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática (DM-UFRPE)
Recife/PE
<thiago.tanaka@ufrpe.br>

Airton Castro
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática (DMAT-UFRPE)
Recife/PE
<airton.castro@ufpe.br>

Recebido: 12/07/2022
Publicado: 08/05/2023