PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1111

Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro

Míriam S. Caneiro   Karen E. Nobokite   Marco Antonio de A. Fernandes

Resumo

Este artigo apresenta três diferentes provas para o interessante fato de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o *Número de Ouro*. Em termos mais precisos, mostra-se, de três modos distintos, que a sequência $(\mathrm{x_n})_\mathrm{n}$ definida por $\mathrm{x_n} = \dfrac{\mathrm{f_{n+1}}}{\mathrm{f_n}}$, onde $\mathrm{f_n}$ é o n-ésimo termo da *Sequência de Fibonacci*, converge para $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; Número de Ouro; Fórmula de Binet.

Abstract

This article presents three different proofs for the interesting fact that the ratios between consecutive Fibonacci numbers converge to the *Golden Number*. In more precise terms, it is shown, in three different ways, that the sequence $(\mathrm{x_n})_\mathrm{n}$ defined by $\mathrm{x_n} = \dfrac{\mathrm{f_{n+1}}}{\mathrm{f_n}}$, where $\mathrm{f_n}$ is nth term of the *Fibonacci Sequence*, converges to $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Keywords: Fibonacci Sequence; Golden Number; Binet's Formula.

1. Introdução

Parte deste artigo foi publicada na *Revista do Professor de Matemática nº 105*, onde apresentou-se apenas uma das três provas que serão abordadas aqui; a saber, aquela que faz uso da *Fórmula de Binet*. A essa versão acrescentamos duas outras provas, que utilizam resultados de Análise Real: uma, que estabelece que a sequência abordada é uma sequência de Cauchy (sendo, portanto, convergente); e outra, que mostra que, tanto a subsequência constituída pelos termos de índice par, quanto a subsequência constituída pelos termos de índice ímpar, dessa sequência, são monótonas e limitadas (sendo, portanto, convergentes) e convergem para o *Número de Ouro*.

A *Sequência de Fibonacci* e o *Número de Ouro* são temas que, apesar de oferecerem inúmeras possibilidades de abordagens em sala de aula, tem sido ainda pouco explorados, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior. Devido às suas ligações com várias áreas da Matemática, esses temas podem ser abordados durante o estudo de diversos conteúdos, tais como: divisibilidade e mdc nos inteiros, recorrências, razões e proporções, geometria plana, números binomiais e o triângulo de Pascal, princípio da indução finita, sequências de números reais, dentre outros.

A sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$ é conhecida como *Sequência de Fibonacci* em homenagem ao matemático Leonardo de Pisa, ou Leonardo Fibonacci que, por volta do século XIII, publicou o livro *Liber Abaci*, contendo o famoso *Problema dos Coelhos*, que dá origem a essa sequência, cujo enunciado diz o seguinte:

Um casal de coelhos recém-nascidos, constituído por um macho e uma fêmea, é posto num lugar cercado por muros de todos os lados. Quantos casais de coelhos existirão após um ano, supondo-se as condições ideais: nenhum coelho morre, todo casal de coelhos, após dois meses de vida, dá à luz um primeiro casal de filhotes e, após ter o primeiro casal de filhotes, gera sempre um novo casal a cada mês.

A situação descrita no Problema dos Coelhos está ilustrada, até o quinto mês, na figura abaixo:

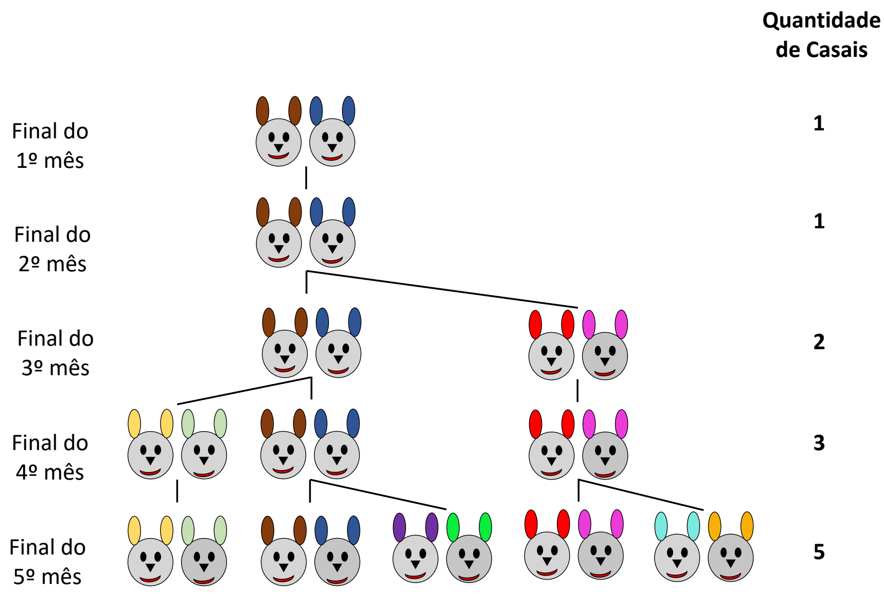

Figura 1: O Problema dos Coelhos.

É fácil ver que o número de casais de coelhos ao final de cada mês fornece os termos da sequência de Fibonacci. Observe que, nela, os dois primeiros termos são iguais a 1, e então cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores; ou, dito de outro modo, denotando por $(f_n)_n$ a *Sequência de Fibonacci*, tem-se, por definição, que:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Cada termo f_n dessa sequência é chamado de *n-ésimo Número de Fibonacci*. Tais números possuem diversas propriedades curiosas e, a título de exemplo, citamos uma interessantíssima, objeto de um artigo publicado na RPM nº 53: *"Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, como soma de Números de Fibonacci distintos e não consecutivos"*.

O *Número de Ouro*, também chamado de *Razão Áurea* ou *Divina Proporção*, surge a partir de uma certa divisão de um segmento, a qual foi chamada, por Euclides, no Livro VI de *Os Elementos*, de *divisão de um segmento em média e extrema razão*. Dizemos que um segmento de reta é cortado na **razão áurea** (ou ainda, em média e extrema razão) quando, assim como o segmento todo está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte.

Ou, equivalentemente:

Definição 1. Dizemos que um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ na **razão áurea** (ou, em média e extrema razão) quando

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

A razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é chamada de **Razão Áurea** ou **Número de Ouro**; sendo, usualmente, representada pela letra ϕ do alfabeto grego.

Note que, $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ e, portanto, dividir um segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão consiste em dividi-lo em duas partes, de modo que, a medida da maior dessas partes (no caso, $\overline{AC}$), seja a média geométrica entre a medida do segmento e a medida da parte menor.

Para obtermos o valor numérico de ϕ, consideremos um segmento $\overline{AB}$ de comprimento a, tal que o ponto C divida-o em média e extrema razão, sendo $\overline{AC}$ o segmento maior obtido com essa divisão. Se x for a medida do segmento $\overline{AC}$, então a medida do segmento $\overline{BC}$ será $a - x$. Isso está ilustrado na Figura 2 abaixo.

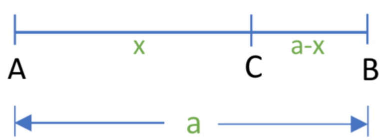

Figura 2: Divisão de um segmento na razão áurea.

Da definição (1), temos que:

$$\boxed{\text{C divide } \overline{AB} \text{ em média e extrema razão} \iff \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}}$$

Mas, para $a \in \mathbb{R}$, vem que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Tendo em vista que x é a medida de um segmento, deve ser um número positivo. Portanto, o único valor possível para x é:

$$x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Assim, obtemos finalmente:

$$\phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Note que, como $x = -a\phi$ é solução da equação $x^2 + ax - a^2 = 0$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, em particular, tomando-se $a = -1$, temos que ϕ satisfaz a equação $x^2 - x - 1 = 0$. Logo, uma definição alternativa e puramente algébrica para ϕ, encontrada em diversas publicações, é que ele é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

A *Sequência de Fibonacci* apresenta uma intrigante relação com o *Número de Ouro*: dividindo-se cada Número de Fibonacci pelo seu antecessor, obtemos uma sequência de números reais que converge para ϕ. Esse fato, embora bastante conhecido, geralmente carece de um tratamento mais rigoroso nos textos que abordam esse assunto. O que se observa é que, em boa parte deles, já se supõe que essa sequência é convergente, de modo que os autores limitam-se apenas à tarefa de estabelecer que o limite, de fato, é o *Número de Ouro*. Poucos são os textos que se dedicam à tarefa de provar que essa sequência converge. Nesse cenário, procurando preencher essa lacuna, apresentaremos nesse artigo três provas para este fato.

2. Demonstrações

Antes de passar às provas propriamente ditas, faz-se necessário estabelecer um resultado que será utilizado em uma delas. Trata-se de uma "fórmula fechada", isto é, não recursiva, para os Números de Fibonacci, conhecida como *Fórmula de Binet*. Através dela, pode-se obter qualquer Número de Fibonacci f_n sem precisar conhecer os termos anteriores; ou seja, em função apenas de sua posição n na sequência.

Teorema 1 (**Fórmula de Binet**). *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *o n-ésimo Número de Fibonacci* f_n *é dado por:*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{2}$$

Demonstração. A prova é feita por indução sobre n. É fácil ver que (2) é verdadeira para $n = 1$. Para o passo indutivo, fixado $k \in \mathbb{N}$, suponha que (2) seja válida para todo $n \leq k$; isto é, que se tenha:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad \forall \; n \leq k.$$

Devemos então provar que (2) vale para $n = k+1$. Da hipótese de indução, segue que:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]. \end{aligned}$$

$\square$

Finalmente, enunciaremos o resultado principal, objeto deste artigo.

Teorema 2. *Seja* $(x_n)_n$ *a sequência definida por* $x_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, *onde* f_n *é o n-ésimo número de Fibonacci. Então* $x_n \xrightarrow{n} \phi$.

No que se segue, serão apresentadas três provas distintas para este teorema.

2.1. Primeira Demonstração

A primeira prova a ser apresentada faz uso da Fórmula de Binet dada por (2); de onde obtemos:

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}. \tag{3}$$

Como $0 < \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = 0.$$

Daí, passando ao limite em (3), obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

o que encerra a primeira prova.

2.2. Segunda Demonstração

Para a segunda prova, note inicialmente que, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Portanto, $(x_n)_n$ é a sequência definida (recursivamente) por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

É fácil ver, a partir de (4), que $(x_n)_n$ é uma sequência limitada (uma vez que $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$), mas não é uma sequência monótona. Todavia, conforme mostraremos abaixo, sua subsequência formada apenas pelos termos de índice par é estritamente decrescente, enquanto que sua subsequência constituída apenas dos termos de índice ímpar é estritamente crescente; ou seja:

Afirmação 1: $x_{2n} > x_{2(n+1)}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2: $x_{2n-1} < x_{2n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Faremos apenas a prova da primeira das desigualdades acima, uma vez que a segunda estabelece-se de modo inteiramente análogo. Para isso, usaremos indução sobre n. Inicialmente, note que $2 = x_2 > x_4 = \frac{5}{3}$, o que mostra que a desigualdade desejada verifica-se para $n = 1$. Para o passo indutivo, suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, ocorra $x_{2n} > x_{2(n+1)}$. Daí, podemos escrever:

$$x_{2(n+1)} = 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} > 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n+1)}}} = 1 + \frac{1}{x_{2n+3}} = x_{2(n+2)}, \tag{5}$$

o que conclui a prova da Afirmação 1. Com isto, vemos que a subsequência $(x_{2n})_n$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Logo, $(x_{2n})_n$ é uma sequência monótona e limitada; sendo, portanto, convergente. Seja $l_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x_{2n} \xrightarrow{n} l_1$. Retomando (5), temos:

$$x_{2n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

de onde, passando ao limite, encontramos:

$$l_1 = 1 + \frac{l_1}{l_1 + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad l_1^2 - l_1 - 1 = 0.$$

Resolvendo essa última equação e descartando a raiz negativa (uma vez que l_1 deve ser não negativa, pois é o limite de uma sequência de termos positivos), resulta que $l_1 = \phi$.

De modo análogo, em vista da Afirmação 2, é fácil ver que $(x_{2n-1})_n$ é crescente e limitada superiormente por 2. Logo, existe $l_2 \in \mathbb{R}$ de modo que $x_{2n-1} \xrightarrow{n} l_2$. Novamente, procedendo de modo análogo ao que foi feito acima, é fácil concluir que $l_2 = \phi$.

Como $l_1 = l_2 = \phi$, podemos concluir que a sequência $(x_n)_n$ também converge para ϕ, o que encerra a segunda demonstração.

3. Terceira Demonstração

A ideia desta prova é mostrar que $(x_n)_n$ é uma *Sequência de Cauchy*; isto é, uma sequência em que os termos x_n tornam-se arbitrariamente próximos uns dos outros, à medida que $n \in \mathbb{N}$ cresce.

Quando $(x_n)_n$ é uma sequência de números reais, é um fato bem conhecido que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se, é convergente. A prova de que toda sequência convergente de números reais é uma sequência de Cauchy é fácil e direta; entretanto, a recíproca dessa afirmação (ou seja, que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente), que é precisamente o fato que usaremos aqui, requer um pouco mais de trabalho. Para o leitor interessado nos detalhes, sugerimos a leitura do belíssimo livro [3].

Começaremos estabelecendo duas desigualdades importantes.

Lema 1. $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *com* $n > 1$.

Demonstração. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, temos:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \left|\frac{f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2}{f_n f_{n+1}}\right| = \left|\frac{f_n(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}(f_n + f_{n-1})}{f_n(f_n + f_{n-1})}\right| = \\ &= \left|\frac{f_n^2 + f_n f_{n+1} - f_n f_{n+1} - f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2 + f_n f_{n-1}}\right| = \left|\frac{f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2 + f_n f_{n-1}}\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

Por outro lado, como a sequência de Fibonacci é não decrescente, podemos escrever:

$$2f_n f_{n-1} = f_n f_{n-1} + f_n f_{n-1} \leqslant f_n f_n + f_n f_{n-1} = f_n^2 + f_n f_{n-1}. \tag{7}$$

De (6) e (7) decorre a desigualdade desejada:

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2 + f_n f_{n-1}}\right| \leqslant \left|\frac{f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1}}{2 f_n f_{n-1}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f_n}{f_{n-1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|.$$

□

Lema 2. $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A prova é feita por indução sobre n. Inicialmente, note que:

$$|x_2 - x_1| = 1 < 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad \text{e} \qquad |x_3 - x_2| = \frac{1}{2} < 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2},$$

o que significa que a desigualdade desejada verifica-se para $n = 1$ e para $n = 2$.

Para o passo indutivo, lançaremos mão do Lema anterior. De fato, supondo que a desigualdade desejada seja válida para $n = k > 1$, podemos escrever:

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2}|x_{k+1} - x_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)-2},$$

o que encerra a prova. □

Finalmente, estamos prontos para mostrar que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.

Com efeito, usando a desigualdade triangular e o Lema 2 acima, obtemos, para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+(k-1)} + x_{n+(k-1)} - x_{n+(k-2)} + x_{n+(k-2)} - \ldots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \leqslant \\ &\leqslant |x_{n+k} - x_{n+(k-1)}| + |x_{n+(k-1)} - x_{n+(k-2)}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(k-1)-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(k-2)-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j-2} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}. \end{aligned} \tag{8}$$

Observe que essa última somatória representa a soma S_k dos k primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = \frac{1}{2}$. Com isso, é facil ver que:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Voltando com (9) em (8), encontramos:

$$|x_{n+k} - x_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \xrightarrow{n} 0, \quad \forall\ k \in \mathtt{N};$$

o que prova, como afirmamos, que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Disto segue que $(x_n)_n$ é uma sequência convergente; isto é, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \xrightarrow{n} x$.

Passando ao limite na segunda igualdade de (4), obtemos $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, de onde vem $x^2 - x - 1 = 0$.

Resolvendo essa equação, e lembrando que x deve ser não negativo (pois é o limite de uma sequência de termos positivos), concluímos que $x = \phi$. Logo:

$$x_n \xrightarrow{n} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Observações

Para encerrar, teceremos alguns comentários que julgamos pertinentes e interessantes sobre esse assunto.

1. Conforme vimos acima, vale que:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = \phi.$$

   Isso significa que, para N "suficientemente grande", $\phi \cdot f_{N-1}$ é uma "boa aproximação" para f_N; isto é, f_N pode ser "aproximado" pelo produto do seu antecessor por ϕ.

2. O objetivo principal deste artigo é destacar a importante e surpreendente relação existente entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, preenchendo uma lacuna presente na maioria dos textos que abordam esse assunto, ao estabelecer, de três maneiras diferentes, o fato de que as razões entre termos consecutivos dessa sequência convergem (e esse limite é precisamente o *Número de Ouro*). Todavia, a Sequência de Fibonacci não é a única com essa propriedade.

   Na verdade, o que queremos salientar aqui é que essa convergência é (quase sempre - exceto por dois casos que mostraremos adiante) uma consequência *apenas da recorrência* em (1); isto é, não depende da escolha dos dados iniciais $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$. Vejamos.

   Uma *Sequência Generalizada de Fibonacci* (que abreviaremos *SGF*) é uma sequência de números reais para a qual vale a recorrência em (1), e onde os dois primeiros termos são números reais escolhidos arbitrariamente, desde que não sejam simultaneamente nulos (uma vez que, se isso acontecer, a sequência assim obtida será a sequência nula). Em outras palavras, uma SGF é uma sequência $(F_n)_n$ da forma:

$$\begin{cases} F_1 = a \\ F_2 = b \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{10}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são escolhidos arbitrariamente, e não são simultaneamente nulos.

É óbvio que a Sequência de Fibonacci é um exemplo de uma SGF. Um outro exemplo extremamente interessante de SGF é a *Sequência de Lucas*, estudada por Édouard Lucas em 1876, comumente denotada por $(L_n)_n$, que é definida tomando-se os termos iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$. Essas duas sequências são tão interessantes e possuem tantas propriedades, que já deram origem a vários livros (veja, por exemplo, [2] e [6]), além de terem sido realizadas conferências internacionais para tratarem exclusivamente deste assunto (veja [5]).

Conforme já adiantamos, nosso objetivo agora é mostrar que, se $(F_n)_n$ é uma SGF, então:

$$X_n := \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \xrightarrow{n} \quad \phi \tag{11}$$

com exceção de um caso, como se verá logo adiante.

Para provar isso, consideremos $(F_n)_n$ como em (10), onde $a, b \in \mathbb{R}$ não são simultaneamente nulos. É fácil mostrar (por indução) que, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$, vale:

$$F_n = a \cdot f_{n-2} + b \cdot f_{n-1}$$

onde f_{n-2} e f_{n-1} são números (da sequência "original") de Fibonacci. Daí, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot f_{n-1} + b \cdot f_n}{a \cdot f_{n-2} + b \cdot f_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a + b \cdot \dfrac{f_n}{f_{n-1}}}{a \cdot \dfrac{f_{n-2}}{f_{n-1}} + b} = \frac{a + b\phi}{a\dfrac{1}{\phi} + b} = \frac{a + b\phi}{a + b\phi}\phi = \phi$$

o que estabelece (11), desde que $a + b\phi \neq 0$ (isto é, quando $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $b \neq -\frac{a}{\phi}$). Com isso, concluímos que, com exceção de apenas dois casos, toda sequência definida por (10) possui a mesma propriedade de convergência (11) que estabelecemos aqui para a Sequência de Fibonacci; o que significa que tal propriedade não depende da escolha dos dados iniciais F_1 e F_2. Em particular, quando F_1 e F_2 são *inteiros* não simultaneamente nulos (o que implica em $b \neq -\frac{a}{\phi}$), a convergência em (11) sempre ocorre.

Para encerrarmos essa observação, vamos estudar o caso excluído acima; mais precisamente, vamos considerar a sequência $(G_n)_n$ definida por:

$$\begin{cases} G_1 = a \neq 0 \\ G_2 = -\dfrac{a}{\phi} \\ G_{n+1} = G_n + G_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases} \tag{12}$$

onde $a \in \mathbb{R}^*$ é escolhido arbitrariamente. Nesse caso, é fácil mostrar (por indução) que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$G_n = a \cdot (-\phi)^{-(n-1)};$$

de onde, passando ao limite, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot(-\phi)^{-n}}{a\cdot(-\phi)^{-(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} (-\phi)^{-1} = -\frac{1}{\phi}.$$

3. Pela recorrência em (1), conhecendo-se os termos f_1 e f_2 da Sequência de Fibonacci, podemos obter todos os demais Números de Fibonacci f_n, para $n \geq 3$. Tal recorrência pode ser reescrita como $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$, de onde se vê que cada Número de Fibonacci pode ser obtido pela diferença entre os dois imediatamente posteriores a ele. Isso possibilita estender a Sequência de Fibonacci para o índice 0 e também para índices inteiros negativos. Com isso, obtemos:

$$f_0 = f_2 - f_1 = 0, \quad f_{-1} = f_1 - f_0 = 1, \quad f_{-2} = f_0 - f_{-1} = -1, \quad f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 2, \quad \cdots$$

Assim, f_n passa a fazer sentido para todo $n \in \mathbb{Z}$. A tabela abaixo mostra alguns desses números.

n	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{f_n}$	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Observando essa tabela, somos levados a suspeitar de que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes igualdades:

$$|f_n| = |f_{-n}| \qquad \text{e} \qquad f_n = (-1)^{n+1} f_{-n}. \tag{13}$$

De fato, essas identidades são verdadeiras, e é fácil prová-las usando *indução inteira*. Deixamos essa diversão a cargo do leitor. Com tudo isso em mente, passa a fazer sentido perguntarmos pelo limite de $(x_n)_n$ quando n tende a $-\infty$, e esse é precisamente o objetivo dessa observação.

Afirmamos que:

$$\lim_{n\to-\infty} x_n = \lim_{n\to-\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = -\frac{1}{\phi}.$$

Com efeito, quando $n < -1$ é um número inteiro, então, pondo $m := -(n+1)$, temos que m é um inteiro positivo. Além disso, $m + 1 = -(n+1) + 1 = -n$, de modo que $f_m = f_{-(n+1)}$ e $f_{m+1} = f_{-n}$ são números consecutivos de Fibonacci, cujos índices são números naturais. Nesse caso, sabemos que:

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{f_{-n}}{f_{-(n+1)}} = \lim_{m\to\infty} \frac{f_{m+1}}{f_m} = \phi.$$

Daí e de (13), obtém-se, como afirmamos:

$$\lim_{n\to-\infty} x_n = \lim_{n\to-\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{(-1)^{n+2} f_{-(n+1)}}{(-1)^{n+1} f_{-n}} = -\lim_{n\to-\infty} \frac{f_{-(n+1)}}{f_{-n}} = -\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{f_{-n}}{f_{-(n+1)}}\right)} = -\frac{1}{\phi}.$$

Referências

[1] Carneiro, M. S; Fernandes, M. A. A.; Nobokite, K. E. “Uma Demonstração de que as Razões entre Números Consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro”. *Revista do Professor de Matemática* nº 105. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

[2] Koshy, Thomas. *Fibonacci and Lucas Numbers With Applications.* New York: John Wiley & Sons, 2001.

[3] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1 - Coleção Projeto Euclides.* 15ª Ed. Rio de Janeiro: Impa, 2019.

[4] Livio, Mario. *Razão Áurea: A História de Fi, Um Número Surpreendente.* Tradução de Marco Shinobu Matsumara. Rio de Janeiro: Record, 2009.

[5] Howard. Frederic (ed.). *Applications of Fibonacci Numbers - Volume 9 - Proceedings of The Tenth International Research Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications.* Arizona: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[6] Vajda, Steven. *Fibonacci & Lucas Numbers and The Golden Section: Theory and Applications.* London: Ellis Horwood Books, 1989.

[7] Vorobiov, N. *Lecciones Populares de Matemáticas: Números de Fibonacci.* Moscou: MIR, 1974.

[8] Zahn, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Londrina: Ciência Moderna, 2011.

Míriam S. Caneiro
Universidade do Estado de Mato Grosso
<miriam.saldanha@unemat.br>

Karen E. Nobokite
Escola Estadual Senador Mário Motta
<karen.nobokite@unemat.br>

Marco Antonio de A. Fernandes
Universidade do Estado de Mato Grosso
<marcoaaf@unemat.br>

Recebido: 11/09/2022
Publicado: 16/05/2023