PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1114

Ensaio interdisciplinar para o ensino de limite utilizando o GeoGebra.

Maria Cristina Elyote [1]   José Antonio P. F. Marão [2]

Resumo

Os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no que diz respeito ao Limite de Funções de uma Variável Real, carecem de métodos eficazes para seu ensino, devido aos resultados, quase sempre insatisfatórios, observados no desempenho dos alunos. Considerando essa necessidade, o trabalho em tela, de cunho teórico, tem o escopo de mostrar que é possível elaborar uma proposta interdisciplinar, abordando problemas que envolvem limites e baseada em interpretações computacionais realizadas com o auxílio do *software* GeoGebra, fornecendo condições para que os épsilons e deltas, presentes na definição de limite, possam ser mais bem compreendidos através de problemas propostos e de suas respectivas interpretações. Além disso, as situações problemas, foram devidamente implementadas no GeoGebra e poderão ser utilizadas pelos professores para lecionarem as suas aulas.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; Interdisciplinaridade; GeoGebra.

Abstract

The fundamentals of Differential and Integral Calculus, especially with regard to the Limit of Functions of a Real Variable, lacks effective methods for its teaching, due to the results, almost always unsatisfactory, observed in the performance of students. Considering this need, the work on screen, of a theoretical nature, has the scope to show that it is possible to elaborate an interdisciplinary proposal, addressing problems that involve limits and based on computational interpretations carried out through GeoGebra, providing conditions for the epsilons and deltas, present in the definition of limit, can be better understood through the proposed problems and their respective interpretations. In addition, problem situations are presented, duly implemented in GeoGebra, that can be used by teachers to lecture their classes.

Keywords: Differential and Integral Calculus Teaching; Interdisciplinarity; GeoGebra.

1. Introdução

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os cursos de Engenharia, Matemática, Física e Química além de cursos como Economia, Administração e Ciências Contábeis estabelecem os

[1]Parcialmente apoiado pela Universidade do Estado da Bahia
[2]Parcialmente apoiado pela Universidade Federal do Maranhão

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

conteúdos básicos que devem figurar em suas estruturas curriculares. Os Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral é um componente curricular que deve figurar na estrutura curricular de todos os cursos acima listados. No entanto, a pergunta: "Qual abordagem o professor deve aplicar em cada curso?"é pertinente, pois o docente é responsável por apresentar os conteúdos e técnicas que fundamentarão outras disciplinas específicas nos respectivos cursos de graduação em que o Cálculo Diferencial e o Integral figuram.

Os conteúdos apresentados ao longo das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para a formação e consequente utilização dos seus conceitos por parte dos futuros profissionais, uma vez que muitos necessitarão aplicar os referidos conhecimentos em situações específicas ao longo de suas vidas profissionais. Entretanto, mesmo sendo um conjunto de conteúdos fundamentais para a formação de profissionais de diversas áreas, os resultados obtidos pelos discentes não são satisfatórios. Uma pesquisa importante foi feita por Rosa [1] e concluiu que a elaboração de estratégias de ensino dos conteúdos ministrados nas disciplinas de Cálculo é fundamental para melhoria dos índices.

A necessidade de estratégias inovadoras para o ensino de Cálculo não é recente, ela remonta à década de 1980, e foi impulsionada por Peter Lax [2], que escreveu um texto que posteriormente ficou conhecido como "Reforma do Cálculo". No texto, Lax manifestou insatisfação com o ensino de Cálculo da época e ainda, segundo [2], propôs a utilização de tecnologias para o ensino desse importante componente curricular. As tecnologias propostas por Lax, na década de 1980, são: Uso de Calculadora e de *Softwares* Computacionais. Atualmente a utilização desses elementos pode ser feita em um único programa de computador, como o GeoGebra ou o Octave, por exemplo. Segundo Caligares, Schivo & Romiti [3] "A visualização Matemática é o processo de formação de imagens (seja mentalmente, ou com lápis e papel, ou com a ajuda da tecnologia) e usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão Matemática." A visualização da figura do gráfico é fundamental para a compreensão do conceito que está sendo apresentado, mas quando é possível 'dar vida' àquilo que o docente pretende explicar, o discente tem uma experiência ímpar que consiste em visualizar "A Matemática em Movimento". Um exemplo muito interessante é aquele fornecido na interpretação geométrica acerca do Limite de Funções de Uma Variável Real, que geralmente é feita por meio de um gráfico e nem sempre permite ao aluno compreender o fenômeno de modo satisfatório. Convém lembrar que, dentre as definições apresentadas ao longo das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, a definição de Limite é a que apresenta maior complexidade, seja pelo fato de ser apresentada nos primeiros períodos dos cursos de graduação como também pela dificuldade de interpretação.

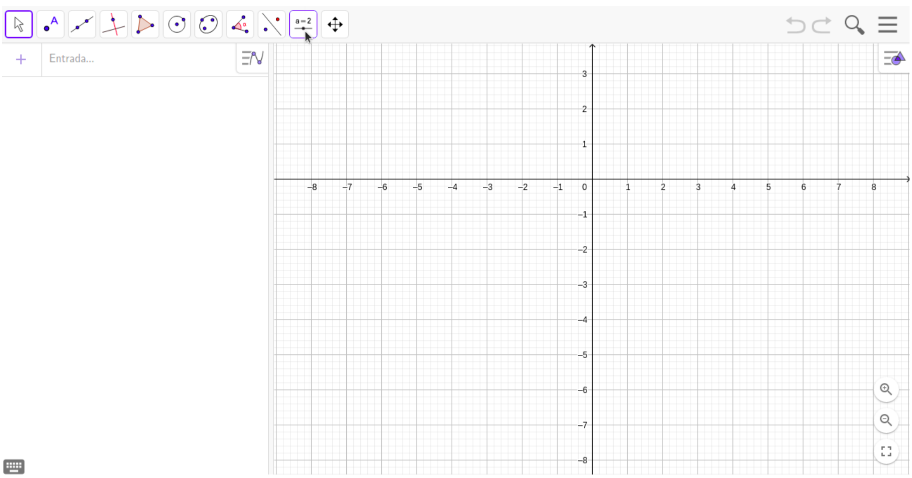
Considerando a escassez de referências que tratem de técnicas para o ensino de Limite, este trabalho tem o escopo de apresentar formas para ilustrar a definição, além de apresentar exemplos de cunho interdisciplinar a fim de construir uma proposta viável para o ensino de Limite nos primeiros anos da graduação em cursos de Engenharia, Matemática, Física e Química, por exemplo. Para alcançar os objetivos, o trabalho foi dividido da seguinte forma: Na primeira seção, intitulada A Proposta, foram apresentadas algumas funções importantes do GeoGebra, a definição de Limite e sua respectiva interpretação no GeoGebra. Já na segunda seção, cujo título é O Limite e a Interdisciplinaridade, foram apresentados dois problemas e suas respectivas soluções. Em seguida, na seção O GeoGebra e o Limite, as interpretações para os problemas elencados na seção anterior são feitas e programas elaborados no GeoGebra foram disponibilizados em https://www.geogebra.org/u/josemarao, possibilitando ao leitor a verificação dos resultados obtidos. Por fim, as Considerações Finais apresentam a conclusões e perspectivas dos autores frente à proposta.

2. A Proposta

O GeoGebra é um *software* livre também utilizado por professores de Cálculo Diferencial e Integral [4]. O *software* possui comandos que permitem a formação de figuras planas e espaciais além de gráficos de Funções de Uma e Duas Variáveis Reais.

A função controle deslizante, presente nas versões do GeoGebra, permite que um parâmetro varie de acordo com a necessidade do programador, o que vai auxiliar na elaboração dos programas que serão utilizados para as interpretações da definição de Limite e dos problemas apresentados ao longo do texto.

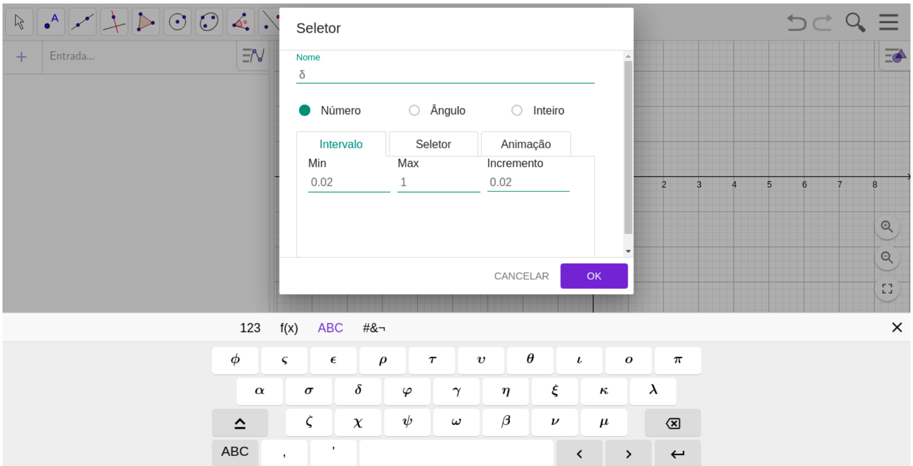
Figura 1: Janela 2D do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Após selecionar o ícone da função é possível atribuir uma letra que, após inserida em uma expressão, poderá variar em um intervalo previamente escolhido pelo usuário.

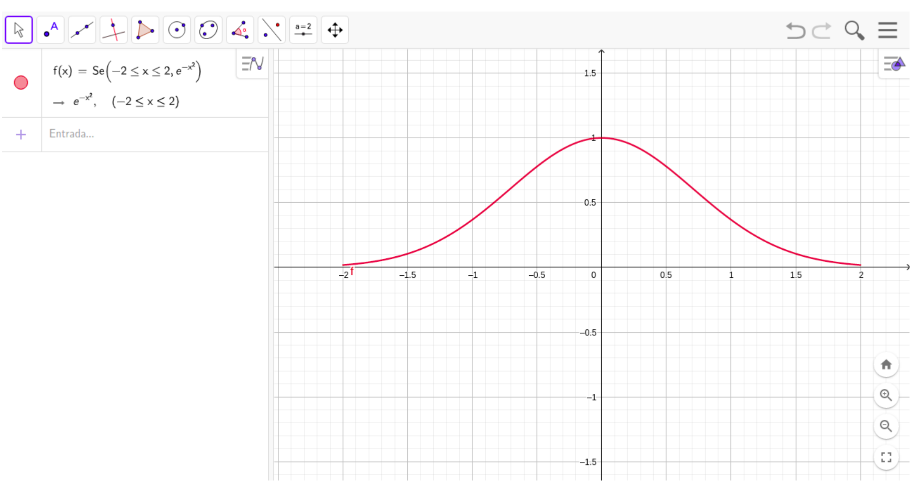
Figura 2: O Controle Deslizante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Acima, na Figura 2, apresenta-se a caixa de seleção do controle deslizante. Nela é possível inserir uma letra ou nome para o controle escolhido, além de um intervalo de variação e seu respectivo incremento. Ainda na Figura 2, o nome escolhido foi δ, o intervalo de variação foi de 0.02 até 1, e o incremento escolhido foi 0.02. Uma vez escolhido o controle deslizante é possível gerar gráficos de funções de uma e duas variáveis reais, o que pode ser feito inserindo a lei de formação da função e um intervalo de interesse.

Figura 3: Inserindo uma função.



Fonte: Elaborada pelos autores.

2.1. Elementos Matemáticos Importantes

A teoria básica acerca de Limite de Funções de uma Variável Real será discutida ao longo desta subseção. Inicialmente será apresentada a definição formal de limite, pois dela surgirá a primeira implementação feita no *software* GeoGebra.

Definição 1. Seja f uma função real e A um subconjunto dos números reais. Dado que a é um ponto de acumulação de A e seja L um número real, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

A partir da definição acima é possível formular as definições de limites laterais e dos limites infinitos e no infinito. Tais definições, apesar de importantes, não serão listadas no texto, mas podem ser encontrada em [5].

O cálculo do limite deve considerar o resultado abaixo:

Teorema 1. *Se existe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

e existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = B,$$

então $A = B$.

O **Teorema 1** garante que, se o limite de uma função quando x tende a determinado ponto existe, então esse valor é único. O resultado, apesar de simples, garantirá a unicidade dos resultados que serão encontrados na próxima seção.

A compreensão da teoria de limites depende do correto entendimento da ideia de proximidade. Compreender o comportamento de uma função quando um ponto do seu domínio aproxima-se de um número não é uma tarefa fácil para alunos iniciantes, sobretudo quando a ideia não é apresentada de maneira dinâmica, ou seja, mostrando o efeito que a aproximação provoca na função.

A definição de limite, apresentada acima, será agora ilustrada por meio do GeoGebra, e, para isso, será utilizado o controle deslizante. Para apresentar a situação particular

$$\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$$

foi criado o controle deslizante delta considerando sua variação de 0.2 até 1 com incremento de 0.2. A escolha é justificada pelo fato de que os valores de x devem se aproximar de 2 mas não devem ser iguais a 2[3], e, no caso em tela, a distância entre os valores x e 2 será sempre menor do que 1.

[3] O fato de x aproximar-se de 2, mas não assumir o valor 2, é escrito simbolicamente da seguinte forma $0 < |x - 2| < \delta$.

Figura 4: Inserção de valores para a construção do controle deslizante.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando $f(x) = 3x+1$, $a = 2$ e a definição de limite, do ponto de vista formal, é preciso mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$ deve existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$, se $0 < |x-2| < \delta$, então $|(3x+1)-7| < \varepsilon$. Sendo assim, considerando a última desigualdade:

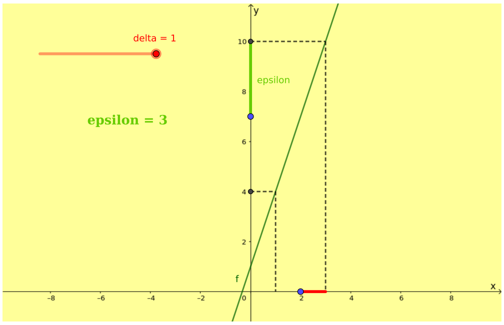
$$|(3x+1)-7| = |3x-6| = 3\,|x-2| < \varepsilon.$$

Dado que $0 < |x-2| < \delta$, então $3\,|x-2| < 3\delta$. Por fim, escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$:

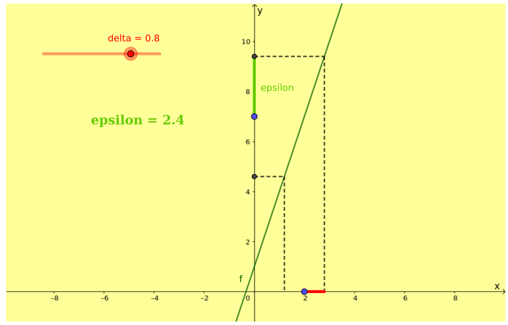
$$|(3x+1)-7| = |3x-6| = 3\,|x-2| < 3.\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Logo, $|(3x+1)-7| < \varepsilon$.

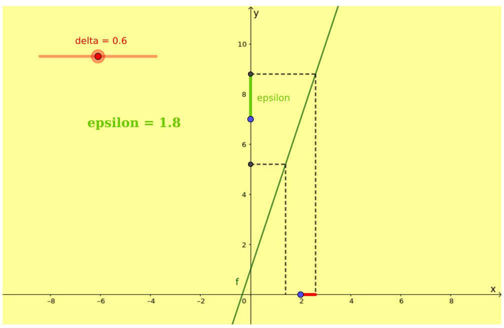
Figura 5: Ilustrações da situação particular feitas no *software* GeoGebra.



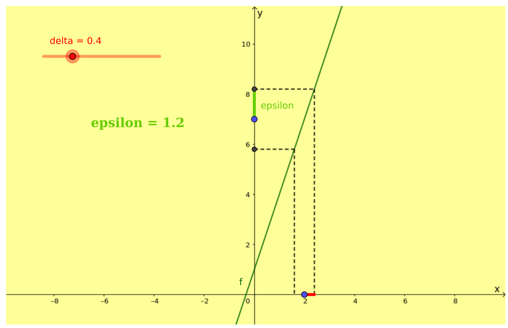
(a) $\delta = 1$ fornece $\varepsilon = 3$



(b) $\delta = 0.8$ fornece $\varepsilon = 2.4$



(c) $\delta = 0.6$ fornece $\varepsilon = 1.8$



(d) $\delta = 0.4$ fornece $\varepsilon = 1.2$

Fonte: Elaborada pelos autores.

O quadro acima permite visualizar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mas próximos de 7 à medida que os valores de x aproximam-se de 2. Além disso, variando os diferentes valores de delta é possível constatar a veracidade da relação $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Além das figuras construídas foi elaborado e disponibilizado um programa, feito no GeoGebra, e que permite ao usuário realizar os testes e assim interagir para comprovar que a relação $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ é verificada para o caso em questão. O programa elaborado está disponível e pode ser acessado por qualquer usuário que tenha interesse, o que é possível graças a uma funcionalidade do GeoGebra, que permite aos seus usuários armazenar e compartilhar os programas elaborados. O programa pode ser acessado através do seguinte *link*: https://www.geogebra.org/m/svfxyab7. Ao clicar no botão "Iniciar Animação" o usuário terá a oportunidade de verificar como a aproximação ocorre, além de constatar a validade da relação encontrada anteriormente. O botão "Parar", quando acionado, finaliza a animação.

3. O Limite e a Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade no ensino de Cálculo deveria ocorrer naturalmente, principalmente quando essa teoria é apresentada para alunos dos cursos de Engenharia, Física e Química, por exemplo, pois através de práticas interdisciplinares é possível evidenciar a importância do Cálculo nas mais diversas aplicações, além de dar sentido para os conceitos apresentados. Segundo Silva, Bernardo

& Yabiku [6] ,

> *[...] grande parte dos alunos, frequentemente, demonstram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais, por não encontrarem sentido e tão pouco aplicação prática dos conceitos aprendidos na sala de aula, evidenciando a importância pedagógica da interdisciplinaridade como ferramenta de materialização conceitual.* (Silva, Bernardo & Yabiku, 2020, p.170)

Fica evidente a importância de formar conexões com outras áreas e assim dar sentido a ideias, quase sempre apresentadas de forma abstrata nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Já segundo Silva *et al.* [7] ,

> *O processo de ensino-aprendizagem pode ocorrer de diversas maneiras, uma delas é através da interdisciplinaridade do conteúdo trabalhado, mostrando ao aluno onde aquele conhecimento aprendido em uma disciplina pode também estar presente em outras.* (Silva *et al.*, 2014, p.2)

A ideia de mostrar a importância dos conteúdos do Cálculo para a resolução de problemas de outras áreas levará o aluno a criar elos com teorias que são desenvolvidas através desses conhecimentos. Os conteúdos de Física, apresentados na Mecânica Clássica, por exemplo, possuem uma quantidade significativa de tópicos que carecem do Cálculo Diferencial e Integral para serem desenvolvidos.

Agora, serão apresentados dois problemas e em seguida suas respectivas soluções. Como tratado acima, os problemas permitirão a criação de elos com outras disciplinas possibilitando ao aluno a compreensão da importância da Teoria de Limites para a resolução de problemas de Física e Engenharia.

3.1. Estimando a tolerância para o lado de uma placas de metal

A Teoria de Limite será utilizada para dimensionar o lado de uma placa metálica dado que sua área não poderá ultrapassar certo valor.

Problema 1. A ATW é uma indústria especializada na fabricação de peças para diferentes aplicações. Atualmente ela precisa fabricar placas de metal quadradas cuja área deve ser igual a 16 cm^2, com tolerância de $0,90$ cm^2. Considerando que as placas devem ser cortadas de uma placa maior e perfeitamente plana, determine o intervalo em que o lado a do quadrado deve variar para que a especificação imposta no problema seja cumprida?

Considerando que o quadrado possui lado a, é necessário determinar uma variação adequada para o lado de modo que a diferença entre a área do referido quadrado e 16 seja inferior a $0,90$ cm^2. Seja $\mathrm{f(a) = a^2}$, com $\mathrm{a} > 0$, a função que fornece a área de um quadrado de lado a. É necessário considerar inicialmente[4] que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\mathrm{a} \in \mathrm{D(f)}$ e $0 < |\mathrm{a} - 4| < \delta$, então

$$\left|\mathrm{a}^2 - 16\right| < \varepsilon.$$

[4] Foi considerada a possibilidade uma vez que a $\mathrm{f(a)}$ possui limite quando a tende para 4.

Assim, a última desigualdade fornece:

$$|(a-4)(a+4)| < \varepsilon,$$

sendo necessário determinar um intervalo de variação para $|(a+4)|$, o que poderá ser obtido considerando $\delta = 1$ na desigualdade $|(a-4)| < \delta$. Sendo assim,

$$-1 < a - 4 < 1$$

$$7 < a + 4 < 9.$$

Dado que $|(a-4)| < \delta$ e $|(a+4)| < 9$, então

$$\left|a^2 - 16\right| < 9\delta.$$

Considerando $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$ é possível obter: $|(a-4)(a+4)| < 9\delta = 9\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon$. Com isso, dado que ε fornece a diferença entre a área do quadrado de lado 4 e a área do quadrado de lado a [5], e assumindo que $\varepsilon = 0,90$ cm^2, é possível afirmar que o valor de $\delta = \frac{0,90}{9} = 0,10$.

Por fim, dado que $\delta = 0,10$, então é possível afirmar que a medida do lado a do quadrado deve variar entre $3,90$ cm e $4,10$ cm para que a diferença entre a área do quadrado de lado 4 cm^2 e área do quadrado de lado a cm^2 seja sempre inferior a $0,90$ cm^2.

O próximo problema foi extraído de [5] e possui o seguinte enunciado:

Problema 2. A Lei de Ohm para circuitos elétricos diz que $V = RI$. Nessa equação, V é uma voltagem constante, I é a corrente, e R é a resistência em Ohms. Sua empresa recebeu um pedido para fornecer resistores para um circuito no qual V é 120 volts, sendo $I = 5,0$ Amperes com tolerância de $0,10$ Ampere. Em que intervalo R deve ficar para que I esteja a $0,1$ Ampere do valor alvo 5 Amperes?

A função a ser avaliada é $I(R) = \frac{120}{R}$, que é uma função da resistência R. Em virtude da natureza do problema, é necessário determinar um intervalo de variação de R de modo que a diferença entre I(R) e 5 seja menor do que $0,10$. Sendo assim, é necessário mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(I)$ e $0 < |R - 24| < \delta$, então

$$|I(R) - 5| < \varepsilon.$$

Fixando que o valor de $\varepsilon = 0,10$, a última inequação fornece o seguinte:

$$\left|\frac{120}{R} - 5\right| < 0,10$$

o que acarreta no seguinte:

$$-0,10 < \frac{120}{R} - 5 < 0,10$$

$$4,9 < \frac{120}{R} < 5,1$$

[5]Considerando que a deve ser um valor próximo de 4.

$$\frac{1}{5,1} < \frac{\mathrm{R}}{120} < \frac{1}{4,9}.$$

Logo, é possível afirmar que a resistência deve variar entre

$$23,53 < \mathrm{R} < 24,48$$

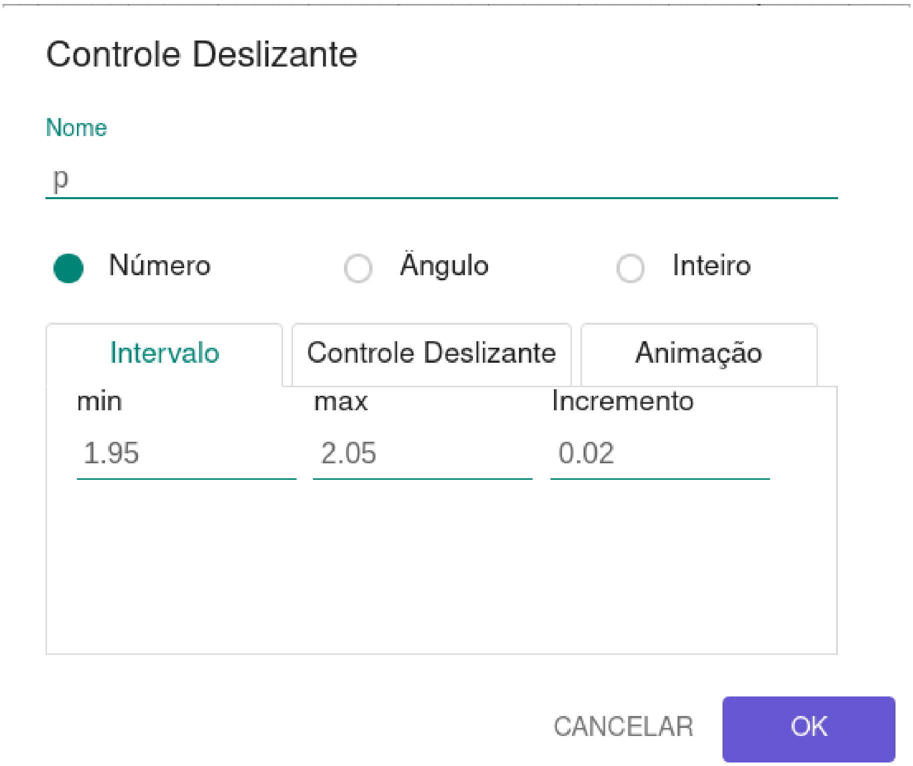
para que a diferença entre I(R) e 5 seja menor do que $0,10$.

3.2. O GeoGebra e o Limite

A análise matemática feita nos problemas da seção anterior serviu para fornecer os valores solicitados nos enunciados das questões, mas ainda não foi realizada uma interpretação geométrica dos resultados. Ao longo da presente seção serão apresentadas interpretações e animações para esses problemas.

Interpretação do Problema 1. A determinação do menor e do maior valor que o lado do quadrado deve assumir é objetivo do Problema 1, resolvido na seção anterior. A interpretação geométrica do problema foi feita no GeoGebra da seguinte forma: Inicialmente foi construído um quadrado de lado 4 cm, que é o quadrado ideal conforme o problema. Em seguida, foi criado um controle deslizante de modo a simular a variação do lado do quadrado no intervalo que vai de $3,9$ cm até $4,1$ cm.

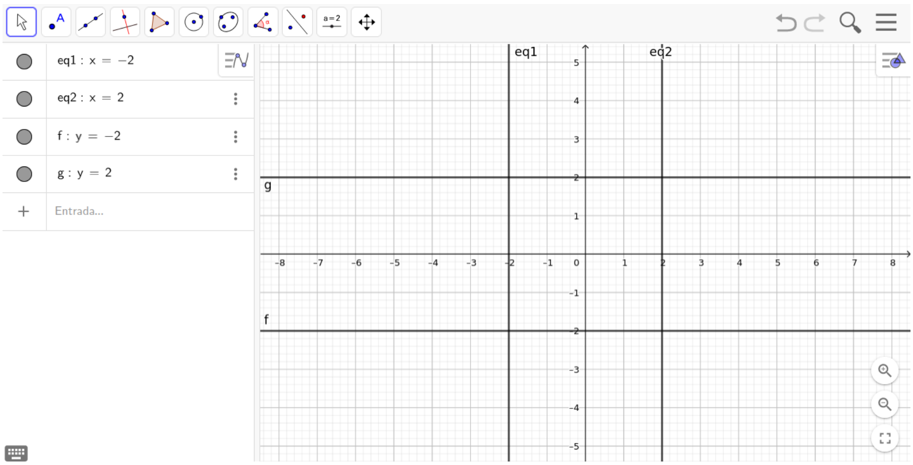
Figura 6: Valores inseridos para a construção do controle deslizante.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Vale destacar que o intervalo acima corresponde à variação de metade do lado do quadrado, uma vez que o quadrado foi construído por meio das retas $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ e $y = 2$.

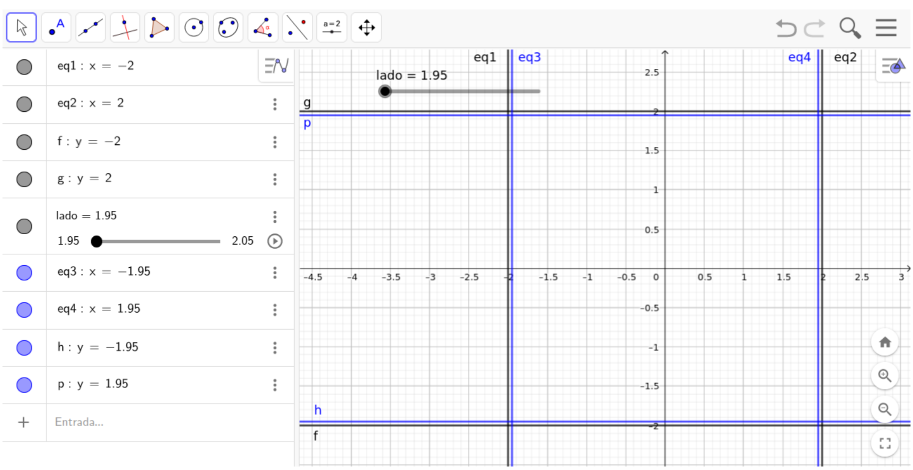
Figura 7: Construção do quadrado de lado 4 centímetros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

As retas acima permitem a formação de um quadrado de lado 4 cm. Agora, será realizado um procedimento análogo, mas serão utilizados x = −p, x = p, y = −p e y = p, retas em azul, que formarão um quadrado de lado 2p, cuja variação deve estar entre 3, 9 cm e 4, 1 cm.

Figura 8: Construção do quadrado de lado Variável.

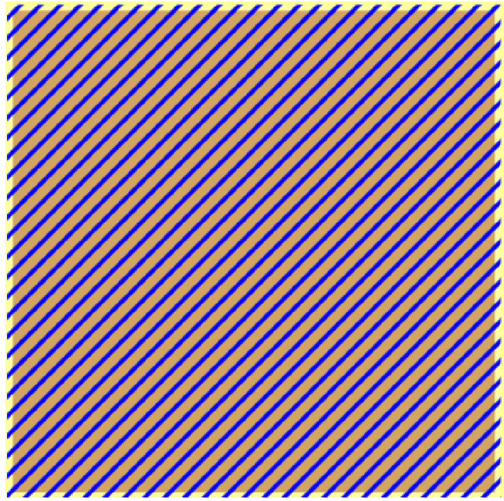


Fonte: Elaborada pelos autores.

Por fim, uma interpretação acerca da validade do resultado encontrado, isto é, se realmente a diferença entre a área do quadrado cujo lado varia entre 3, 9 cm e 4, 1 cm e a área do quadrado de lado 4 cm^2 é inferior a 0, 90 cm^2, de acordo com a especificação descrita no problema.

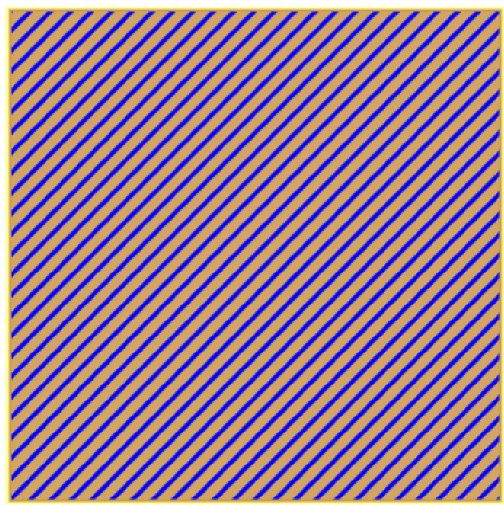
Figura 9: Ilustração da placa de metal no GeoGebra para diferentes valores de a.

(a) $\mathrm{a} = 3,9\mathrm{cm}\ \mathrm{d} = 0,79\mathrm{cm}^2$.



(b) $\mathrm{a} = 4,1\mathrm{cm}\ \mathrm{d} = 0,81\mathrm{cm}^2$.

(c) $\mathrm{a} = 4,06\mathrm{cm}\ \mathrm{d} = 0,48\mathrm{cm}^2$.



(d) $\mathrm{a} = 3,96\mathrm{cm}\ \mathrm{d} = 0,32\mathrm{cm}^2$.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Acima, em cada figura consta o lado a do quadrado e a respectiva diferença entre sua área e a área do quadrado de lado 16 cm^2. No quadro é possível notar que as diferenças não superam o valor estipulado no problema, isto é, $0,90\ \mathrm{cm}^2$, desde que $3,9 < \mathrm{a} < 4,1$, o que atesta a validade do intervalo encontrado. Os resultados podem ser verificados e testados no *site* do GeoGebra em https://www.geogebra.org/m/yhn6cejf, que contém material elaborado pelos autores versando sobre o problema em questão.

O programa foi desenvolvido de modo a apresentar uma animação com diferentes tipos de cujos lados variam entre $3,9$ cm e $4,1$ cm. Para iniciar a animação o usuário deve clicar no botão Variar o Lado do Quadrado.

O próximo problema, referente ao dimensionamento do resistor, será agora interpretado.

Interpretação do Problema 2. A interpretação do Problema 2 deve ser feita considerando a função $I(R) = \frac{120}{R}$, válida para valores de $R \neq 0$. Inicialmente a função foi inserida na caixa de entrada do GeoGebra.

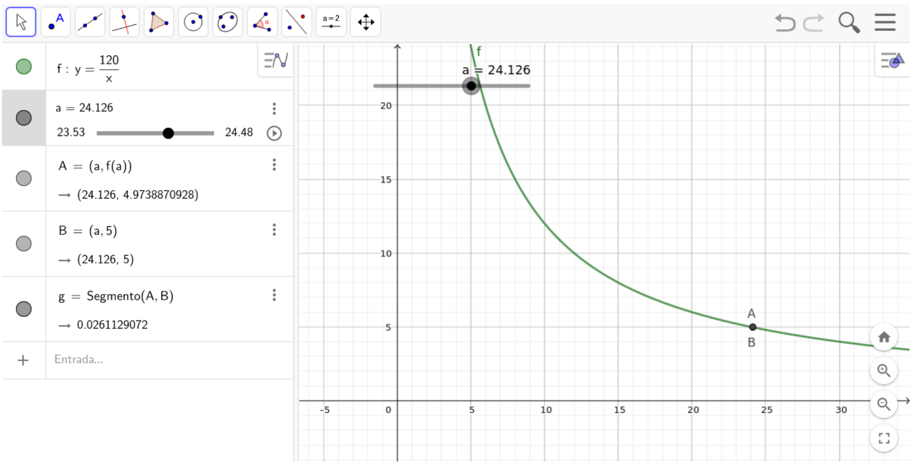
Figura 10: Inserção da função $y = \frac{120}{x}$.

Elaborada pelos autores.

Na caixa de texto foi inserido y no lugar de I(R) e x no lugar de R, e a função deve ser considerada para valores de $x > 0$. Além disso, foi fixado um intervalo para x, através de um controle deslizante, que no caso do problema, deve variar no intervalo $23,53 < x < 24,48$.

Por fim, para verificar se o intervalo realmente satisfaz as condições do problema, é necessário avaliar o valor da distância entre os pontos $A = (a, I(a))$ e $B = (a, 5)$ em que $23,53 < a < 24,48$, e para isso foi criado um controle deslizante de acordo com a Figura 11.

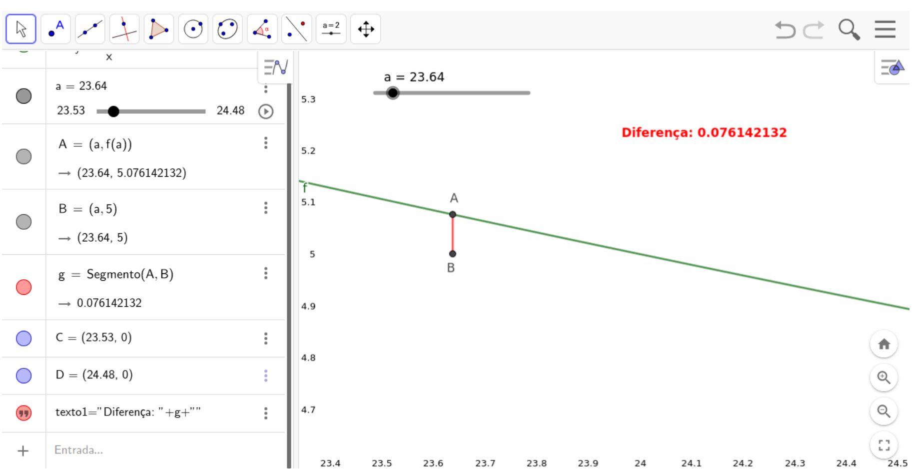
Figura 11: Inserção do controle deslizante.



Elaborada pelos autores.

A função f(x) está definida em todos os pontos do intervalo considerado. Além disso, os pontos A e B parecem coincidir, mas na verdade a distância ente eles fornece o valor de ε,[6] que no problema em questão deve ser menor do que $0,10$ Ampere. A seguir, um quadro ilustrando os valores de ε, em diferentes casos.

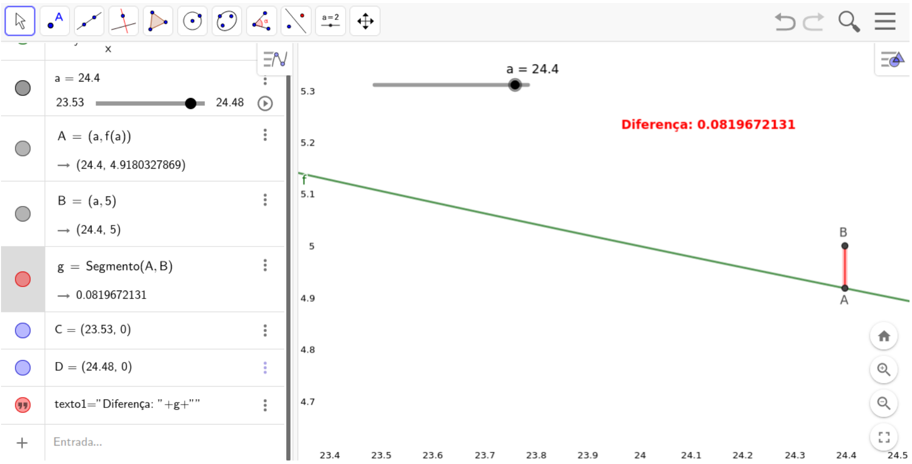
Figura 12: $x = 23,64$ fornece $\varepsilon = 0,076$.



Elaborada pelos autores.

[6]A distância entre os pontos A e B é dada por $|I(R) - 5|$, que deve ser menor que ε.

Figura 13: x = 24, 4 fornece $\varepsilon = 0,081$.



Elaborada pelos autores.

Através da análise das Figuras 12 e 13 é possível constatar que, para valores de x no intervalo considerado, a diferença entre I(R) e 5 será sempre inferior a 0, 10 Ampere. Uma interpretação geométrica da solução foi elaborada no *software* GeoGebra e pode ser acessada em https://www.geogebra.org/m/jezwga9c e em https://www.geogebra.org/m/zrgrunz6.

O usuário deve utilizar o botão que está localizado no campo inferior esquerdo da tela e que possibilita a variação de R no intervalo obtido na solução do problema, tornando possível a constatação do resultado.

4. Considerações Finais

Os conteúdos apresentados nos cursos Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para o desenvolvimento das teorias presentes em outras disciplinas como Física e Engenharia, por exemplo. A determinação de uma sequência didática eficiente para o ensino de limite não foi o objetivo deste trabalho, que teve o propósito de apresentar uma sequência, baseada nos fundamentos teóricos apresentados ao longo deste trabalho e que pode ser avaliada por docentes que ministram disciplinas de Cálculo que possuem o tema Limite de Funções de Uma Variável em sua ementa.

Entendemos que a sequência é promissora, uma vez que possibilita a interdisciplinaridade, tão importante para dar sentido aos conteúdos, quase sempre abstratos, apresentados no Cálculo Diferencial e Integral, além de permitir a utilização dos recursos computacionais.

Além de dar sentido aos conteúdos, a sequência também permite ao professor apresentar animações e interpretações geométricas dos problemas desenvolvidos, possibilitando o acesso dos alunos aos conteúdos através da página https://www.geogebra.org/. Ao acessar a página e localizar o conteúdo, os estudantes terão a oportunidade de preencher, variar os campos e utilizar os botões para obter animações dos problemas e também da definição de Limite.

Por fim, considerando que a sequência proposta contém elementos que contemplam métodos eficazes para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em especial para o ensino de Limite de Função de Uma Variável Real, espera-se que a proposta seja utilizada por professores de Cálculo e que ela seja útil no ensino desse conteúdo.

Referências

[1] Rosa, C. M., "Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso.", *Revista Internacional de Educação*. (2019), v.5, 1-15 (Campinas).

[2] de Almeida, M. E.; Queiruga-Dios, A., Cáceres, M. J.; "Differential and Integral Calculus in First-Year Engineering Students: A Diagnosis to Understand the Failure.", *Mathematics*, v. 9, 1-18.

[3] Caligaris, M. G., Schivo, M. E., Romiti, M. R.; "Calculus & GeoGebra, an interesting partnership", *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 174, (2015); Elsevier.

[4] Nobre, C. N., Meireles, M. R. G., Vieira Júnior, N., Resende, M. N., Costa, L. E., Rocha, R. C.; "The Use of Geogebra Software as a Calculus Teaching and Learning Tool", *Informatics in Education*, v. 15, (2016); Vilnius University.

[5] Thomas, G. B.; *Cálculo*, v. 1, Pearson, (2012), São Paulo.

[6] Silva, A. L., Bernardo, E. P.; Yabiku, K. R.; *A Interdisciplinaridade como perspectiva de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: um estudo de caso.*, XV Simpósio dos Programas de Mestrado Profissional, Unidade de Pós-Graduação, Extensão e Pesquisa, São Paulo, (2020).

[7] Silva G. O.; Souza Neto, E. G.; Teixeira Filha, A. A.; Siqueira, D. R. M.; Bezerra, A, L. R. D. *A aplicação do cálculo integral nas ciências da natureza*, Desenvolvendo o Pensamento Matemático em Diversos Espaços Educativos, (2014), (Paraíba).

Maria Cristina Elyote
Departamento de Ciências Exatas e da Terra
Universidade do Estado da Bahia
<elyote@uneb.br>

José Antonio P. F. Marão
Universidade Federal do Maranhão
Cidade Universitária Dom Delgado
Vila Bacanga, São Luís
e
Universidade Estadual do Maranhão
Campus Paulo VI, Jardim São Cristóvão, São Luís
<jose.marao@ufma.br>

Recebido: 15/12/2022
Publicado: 13/06/2023