PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1115

Desestigmatizando a notação e os diagramas matemáticos

Humberto José Bortolossi Lhaylla dos Santos Crissaff Wanderley Moura Rezende

Resumo

Existe, por parte do público em geral, uma percepção negativa associada à notação e aos diagramas matemáticos. Basta ver as imagens e os memes associados à Matemática que se encontram na Internet ou, mais recentemente, este vídeo https://youtu.be/Bz5Mvf2MCEQ que viralizou nas redes sociais. O presente texto foi escrito com o intuito de combater esta percepção, em nossa opinião equivocada, trazendo reflexões sobre o papel das notações e formas de representações matemáticas.

Palavras-chave: notação, representação, matemática, linguagem, cultura.

Abstract

There is, on the part of the general public, a negative perception associated with mathematical diagrams and notations. Just look at the images associated with Mathematics available on the Internet or, more recently, this video https://youtu.be/Bz5Mvf2MCEQ that went viral on social networks. The present text was written with the intention of combating this perception, in our opinion mistaken, bringing reflections about the role of notations and representations in Mathematics.

Keywords: notation, representation, mathematics, language, culture.

1. Introdução

É comum encontrar imagens nas redes sociais, como a da figura a seguir, que mostra um aluno ou aluna contemplando fórmulas matemáticas e diagramas com uma postura desesperada. Esse tipo de imagem sugere que as notações e os diagramas matemáticos são intrisicamente ruins. *O objetivo principal deste texto é contrapor esse tipo de preconceito mostrando que a notação matemática e os diagramas matemáticos são representações que têm sua utilidade e fazem parte do desenvolvimento da Matemática.*

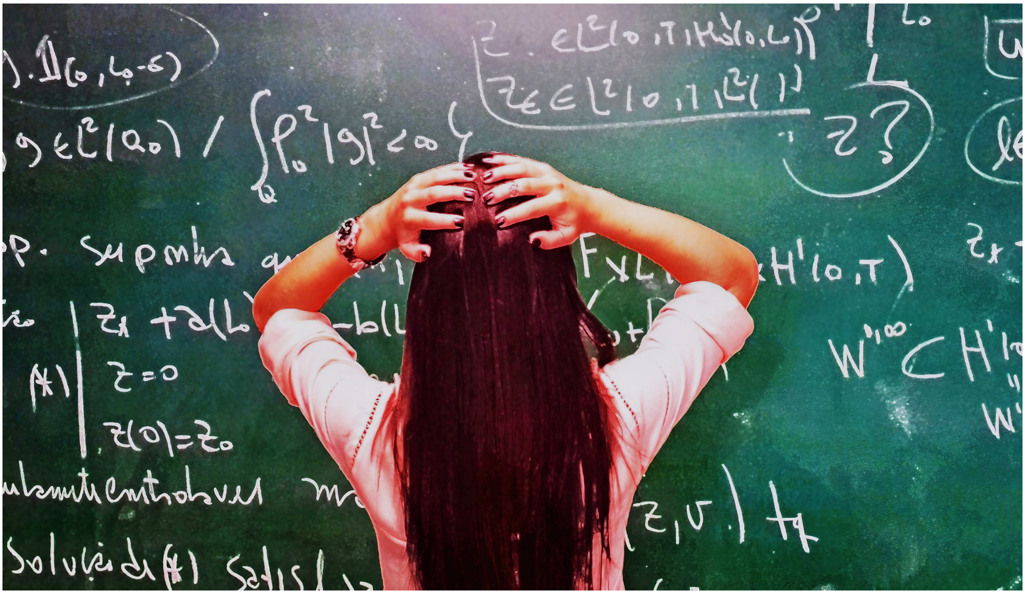


Figura: Uma imagem prototípica da Internet associando a notação matemática a um sentimento negativo.
Fonte: os Autores.

Um exemplo contundente de revolução que uma boa notação matemática pode proporcionar é a representação decimal posicional dos números. Ela desbancou os números romanos e o uso de ábacos e permitiu que os indianos trabalhassem com quantidades bem grandes tais como o r*aiju*, a distância percorrida por Deus em 6 meses se Ele viajar um milhão de quilômetros a cada piscar de olhos, e, também, permitiu o cálculo de juros compostos sem aproximações ou truncamentos, que atendia aos interesses de uma nova classe social em ascensão na Europa. Anterior à notação decimal, os cálculos demandavam tamanha dedicação que motivavam competições entre algoristas. Havia competições entre algoristas (que dominavam os novos números e sua simbologia) e abacistas, fato esse ilustrado na clássica imagem *Margarita Philosophica* (pérola filosófica) feita em 1508 por Gregor Reisch. A imagem em questão ilustra a disputa entre dois métodos de cálculo matemático: o *algorismo* e o *ábaco*. O algorismo é um método de cálculo baseado nos números hindu-arábicos (0-9) e em algoritmos escritos (**notação matemática!**), enquanto o ábaco é um instrumento de cálculo manual que utiliza contas ou outros objetos para realizar operações aritméticas. O propósito da imagem era mostrar as diferenças entre os dois sistemas e demonstrar como o conhecimento matemático evoluiu ao longo do tempo. Naquela época, o algorismo estava começando a se tornar mais popular na Europa, e a imagem ajudou a ilustrar essa transição, mostrando as vantagens do novo sistema em relação ao ábaco.

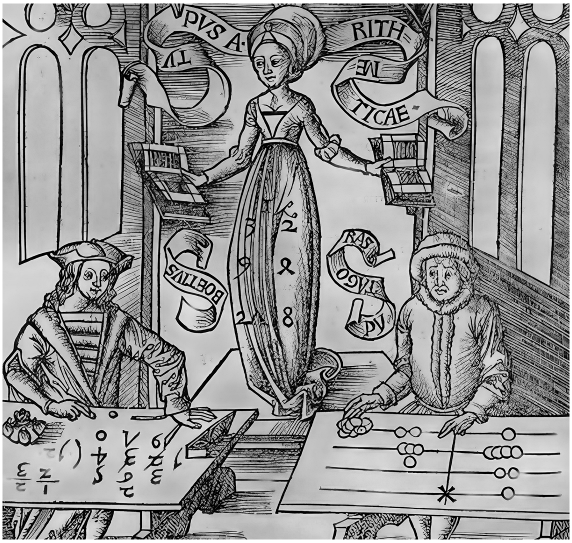


Figura:Algorista vs. Abacista do livro *Margarita Philosophica* (1508).
Fonte:Wikimédia Commons.

E, ainda, outro contexto histórico importante que vale mencionar é o debate sobre qual é a melhor notação para o cálculo diferencial e integral: a notação de Newton ($\dot{y}$, $\ddot{y}$, etc.)[1] ou a notação de Leibniz (dy/dx, d^2y/dx^2) etc.)? Bardi (2009) faz uma discussão sobre essa questão. *A notação e os diagramas matemáticos são representações que viabilizam e potencializam a comunicação e o pensamento matemático, pois, como em outras "linguagens", eles expressam, sintetizam e permitem articular o pensamento e gerar ideias.* Como disse o matemático Whitehead (1861-1947), ao aliviar o cérebro de todo trabalho desnecessário, uma boa notação deixa-o livre para se concentrar em questões mais avançadas e, com isso, aumentar o poder mental da corrida (Iverson (1980)).

Um exemplo de má notação matemática que causou complicações ao longo da história é a notação para números imaginários. A notação original usada para representar números imaginários era "$\sqrt{-1}$", onde o símbolo da raiz quadrada era usado para indicar a raiz quadrada de um número negativo. No entanto, essa notação pode ser confusa e enganosa, pois as raízes quadradas de números negativos não podem ser representadas como números reais.

O matemático suíço Leonhard Euler, em meados do século XVIII, propôs uma nova notação para representar números imaginários. Ele introduziu a letra "i"para representar a raiz quadrada de -1 (ou seja, $i^2 = -1$). Essa notação simplificou e esclareceu a representação dos números imaginários, permitindo uma melhor compreensão e manipulação dos mesmos em cálculos e equações.

A notação original, usando o símbolo da raiz quadrada para números imaginários, levou a mal-entendidos e confusão na matemática. Por exemplo, as pessoas podem pensar que $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{1}$, o que é claramente incorreto ao trabalhar com números imaginários. A introdução da notação "i"para números imaginários ajudou a resolver esses problemas e permitiu um maior desenvolvimento no campo da matemática complexa.

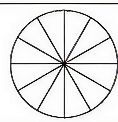
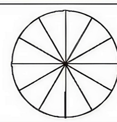
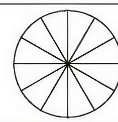
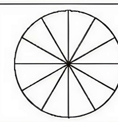
2. Refletindo Sobre Representações em Sala de Aula:Dois Exemplos Do Projeto ULA

[1]Observação : a notação y' é devida a Lagrange.

Nossa opinião: mais do que simplesmente ter contato com essas representações, os alunos deveriam refletir conscientemente sobre elas e suas características (metacognição, Silver (2013)). Vamos apresentar dois exemplos de exercícios que levam a esse tipo de reflexão, sendo um do Ensino Fundamental e outro do Ensino Médio. Os exemplos estão presentes nos materiais desenvolvidos no projeto ULA (Um Livro Aberto de Matemática da Obmep e do Impa (https://umlivroaberto.org/). Nosso primeiro exemplo (ver figura a seguir) situa-se no contexto de frações, ligado ao Ensino Fundamental. Logo após aprender os diversos tipos de representação de frações, incluindo a notação matemática, o aluno é levado a perceber com este exercício proposto uma grande vantagem da notação matemática: sua economia. Contudo, note que, para decidir qual pessoa comeu mais e menos *pizza*, os diagramas com setores circulares são mais visuais e eficientes.

Atividade 5

Uma pizza gigante foi dividida em doze fatias iguais. Pedro comeu quatro fatias, Isabella cinco fatias, Bernardo duas fatias e Manuela apenas uma fatia.

	Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
Pinte a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, por extenso, a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, usando notação simbólica matemática, a fração de pizza consumida por cada pessoa				

a) Na sua opinião, qual representação de fração "gasta menos lápis" para ser escrita: usando notação simbólica matemática, escrevendo por extenso ou pintando?

b) Na sua opinião, qual a representação que mais rapidamente ajuda a decidir quem comeu mais e quem comeu menos pizza?

Figura: exercício metacognitivo sobre as diferentes representações de frações, vantagens e desvantagens.
Fonte: os Autores.

A representação gráfica por excelência para vetores no Ensino Médio tem sido segmentos orientados: as setas. O Livro Aberto propõe uma atividade cujo objetivo é levar o aluno ou a aluna a refletir sobre setas como elementos de representação gráfica perguntando se toda seta é, de fato, um vetor. No caso da placa de trânsito, por exemplo, mostrada na figura a seguir, a resposta é não. Isso deve-se ao fato de a seta só codificar direção e sentido. Nessa situação, a magnitude não faz sentido e não é representada. No contexto do mapa de ondas e da previsão do tempo na TV, também mostrado na figura a seguir, o aluno é levado a perceber que existem outras maneiras de se registrar a magnitude. Ele é levado a perceber que isso pode ser feito por meio de cores, já que o registro por meio do comprimento das setas produziria um diagrama pouco útil, pois nesses mapas há muita variação que fazem com que as setas mais longas sobreponham-se às setas mais curtas. De fato, como os estudiosos de visualização em Computação Gráfica têm mostrado, a maneira de se representar um campo vetorial é mais rica e diversificada do que usar apenas setas! (Munzner, 2013).

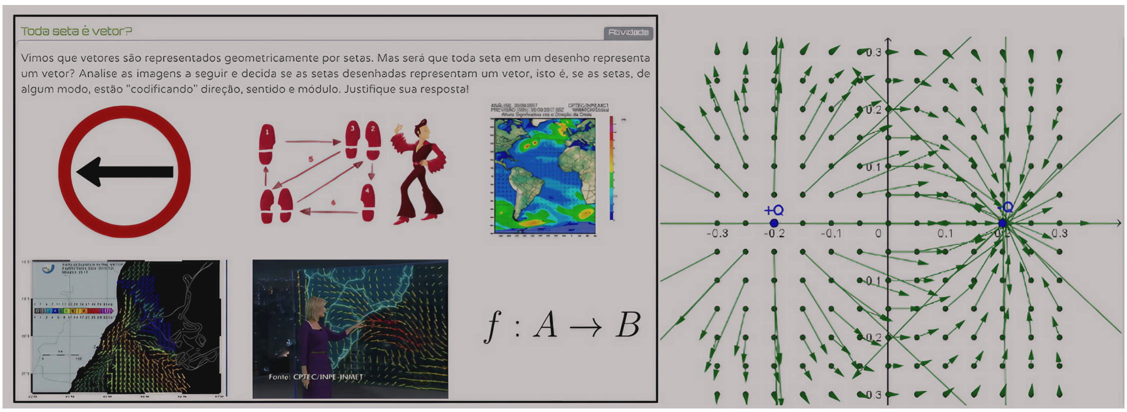


Figura: exercício metacognitivo sobre as diferentes representações de vetores.
Fonte: os Autores.

A questão das representações dos vetores é reforçada no Material Suplementar do capítulo que explora o conteúdo de Vetores, em que se mostra como entes não humanos, no caso, formigas e abelhas, representam e comunicam grandezas vetoriais em suas vidas. No caso das abelhas, por exemplo, quando uma delas encontra uma fonte de alimentação, a comunicação da posição dessa fonte é representada por uma dança: a direção e sentido da dança dão a direção e sentido da fonte de alimentação e sua duração codifica a distância (figura a seguir). A dança da abelha, também conhecida como "*waggle dance*", é uma série de movimentos realizados pelas abelhas operárias para transmitir informações sobre a localização de fontes de alimento, como flores com néctar e pólen, para outras abelhas na colmeia. A dança consiste em um padrão em forma de oito, onde a abelha balança o corpo em uma linha reta no meio dos *loops*. O ângulo do balanço em relação à gravidade indica a direção da fonte de alimento em relação ao sol, enquanto a duração do balanço transmite a distância até a fonte de alimento. Essa forma única de comunicação (**notação!**) permite que as abelhas localizem e coletem recursos de maneira eficiente para sua colônia. Note que a notação é vetorial porque ela codifica direção e magnitude. O fenômeno da dança das abelhas foi descoberto pelo zoólogo e etólogo austríaco Karl von Frisch. Ele estudou o comportamento das abelhas e suas formas de comunicação e, em 1973, recebeu o Prêmio Nobel de Fisiologia ou Medicina por seus trabalhos sobre o comportamento animal, particularmente a dança das abelhas.

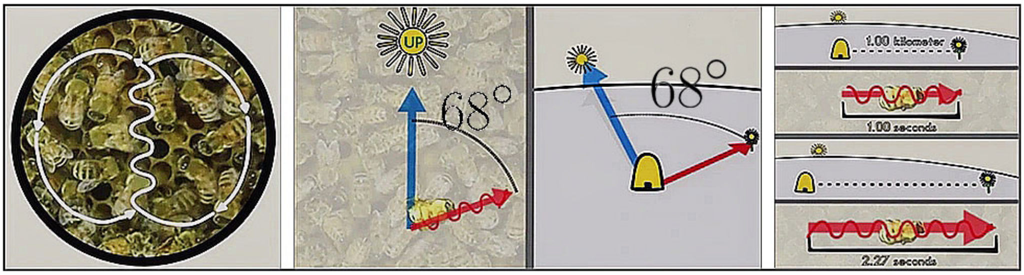


Figura: como abelhas representam vetores com sua dança.
Fonte: https://youtu.be/RGXyhqKsKQ.

Cabe ressaltar que a invenção e o uso de notações e diagramas peculiares não é algo só da Matemática e, de fato, existem vários exemplos em outros empreendimentos humanos: música, química, dança, medicina, como mostra a figura a seguir. Notações são inevitáveis em qualquer empreendimento humano

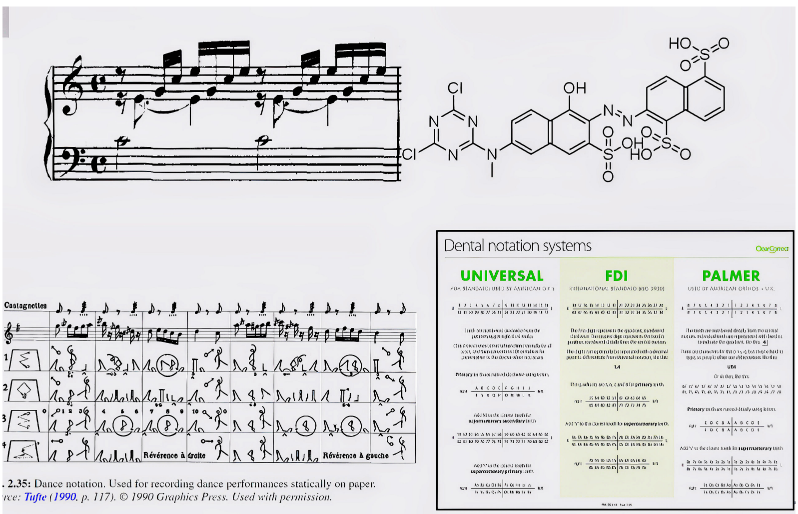


Figura: notações em outras áreas..
Fonte: Wikimedia Common.

3. Considerações Finais

Representação é uma das ideias matemáticas fundamentais, segundo a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) Esperamos, com este texto, chamar a atenção de colegas professores e produtores de materiais didáticos para esta questão e, em particular procurar estratégias e situações didáticas que demonstrem para os alunos que fórmulas e digramas matemáticos não foram concebidos para torturá-los, mas que eles têm suas características e muita utilidade! No contexto de notação matemática, uma referência interessantíssima é Cajori (1928) da qual compilamos a tabela a seguir que mostra como a notação para a representação decimal mudou ao longo da história.

Ano	Autor	Notação	Notação Atual
1579	François Viète	0|375	0,375
1585	Simon Stevin	$\overset{\textcircled{1}}{3}\overset{\textcircled{2}}{7}\overset{\textcircled{3}}{5}$	0,375
1593	Christopher Clavius	46.5	46,5
1603	Johann Hartmann Beyer	$8\ 79\overset{\text{v}}{8}$	8,00798
1608	Robert Norton	$3^{(1)}7^{(2)}5^{(3)}$	0,375
1612	Bartholomaeus Pitiscus	13|00024	13,00024
1616	Johannes Kepler	21(90	21,90
1617	John Napier	1993,273	1993,273
1620	John Napier	25.803	25,803
1620	Joost Bürgi	$23027\overset{\circ}{0}022$	230270,022
1623	John Johnson	$3\ \|\overset{1.}{2}\overset{2.}{2}\overset{3.}{9}\overset{4.}{1}\overset{5.}{6}$	3,22916
1624	Henry Briggs	$5^{\underline{9321}}$	5,9321
1629	Albert Girard	1,532	1,532
1629	Wilhelm von Kalcheim	$693\ \dot{\textcircled{2}}$	6,93
1630	Joach. Stegman	39(063	39,063
1631	William Oughtred	$2\ \underline{\|\ 5\ }$	2,5
1651	Robert Jager	$16\|\dot{7}\dot{2}\dot{4}\dot{9}$	16,7239
1653	Richard Balam	3:04	3,04
1657	Francisci à Schooten	58,5$\textcircled{1}$	58,5
1665	Andrea Tacquet	$25.\overset{\text{i}}{8}\overset{\text{ii}}{0}\overset{\text{iii}}{0}\overset{\text{iv}}{7}\overset{\text{v}}{9}$	25,80079
1668	Nicholas Mercator	12[345	12,345
1670	Joannis Caramvels	22=3	22,3
1688	Jonas Moore	116‘64	116,64
1691	Jacques Ozanam	$\overset{(0)}{3}\ \overset{(1)}{9}\ \overset{(2)}{8}$	3,98
1696	Samuel Jeake	$34.\overset{/}{1}.\overset{//}{4}.\overset{///}{2}.\overset{/////}{6}.$	34,1426
1707	William Whiston	0;9985	0,9985
1729	Isaac Greenwood	3,14	3,14
1739	L'Abbé Deidier	$32.6'\,3''\,4'''$	32,634
1777	Henry Clarke	$2^{\cdot}5$	2,5
1857	Ignaz Lemoch	$1^{\cdot}63$	1,63
1875	Anton Steinhauser	$1^{\cdot}63$	1,63
1919	Giuseppe Peano	$1^{\cdot}63$	1,63

Figura: A representação decimal ao longo dos anos.
Fonte: Cajori (1928).

Destacamos que Iverson (2007) lista as qualidades que uma boa notação deve ter. Já Goodman (1976) apresenta uma teoria filosófica das notações. Ainda no contexto filosófico, (Elias, 1991) reúne três temas centrais. No primeiro nível, o autor trata dos símbolos em relação à linguagem, conhecimento e pensamento. Em segundo lugar, ele enfatiza que os símbolos também são padrões sonoros tangíveis da comunicação humana, possibilitados pela pré-condição biológica evolutiva do aparelho vocal humano. Em um terceiro nível, o livro aborda questões teóricas sobre o estatuto ontológico do conhecimento, indo além dos dualismos filosóficos tradicionais, como sujeito//objeto e idealismo//materialismo. Observamos que Cobb, Yackel & McClain (2012) apresentam a questão dos símbolos no contexto escolar. (Knuth, 1992) relata como evoluiu a notação usada nas várias edições de seu clássico livro *Concrete Mathematics*. Por fim, Larson (1983), em seu livro de resolução de problemas, coloca a escolha de uma boa notação como uma das 12 estratégias fundamentais de resolução de problemas. (Mazur, 2014) observa que a notação matemática pode ser usada para resolver problemas complexos, porque ela permite que soluções intermediárias sejam expressas de maneira clara e concisa. Isso significa que os matemáticos podem trabalhar com soluções parciais e simplificar o processo de resolução de problemas complexos. Além disso, a notação matemática pode ser usada para representar relações entre quantidades e operações matemáticas, o que permite que os matemáticos expressem ideias abstratas de maneira mais concreta.

Em resumo, a notação matemática é uma ferramenta poderosa para resolver problemas complexos porque permite que os matemáticos trabalhem com soluções intermediárias e expressem ideias abstratas de maneira mais concreta. O papel dos símbolos no ensino e na aprendizagem de Matemática tem ganhado a atenção e esforços da comunidade de Educação Matemática. Por exemplo, Arcavi (1994, 2005) introduziu o constructo de *Symbol Sense:* a habilidade de entender e manipular símbolos. Isso envolve reconhecer padrões, fazer conexões entre diferentes representações e usar símbolos para representar ideias matemáticas. O *symbol sense* difere do *number sense*, que é a capacidade de entender o significado dos números e suas relações entre si. O *Symbol Sense* é **uma ideia ainda em desenvolvimento** e que não há implicações instrucionais completas descritas ou prescritas para ela. ao longo da história, acadêmicos ilustres têm apontado para as vantagens dos símbolos:

1. **Comunicação eficiente:** Os símbolos matemáticos permitem que ideias complexas sejam expressas de forma concisa e precisa, facilitando a comunicação entre matemáticos.

   Referência: Peirce, C.S. (1879). *On the Algebra of Logic*. American Journal of Mathematics, 3(1), 15-57.

2. R**epresentação abstrata:** Os símbolos facilitam o estudo de estruturas abstratas e conceitos gerais, em vez de se concentrar em casos específicos.

   Referência: Whitehead, A.N. & Russell, B. (1910-1913). *Principia Mathematica*. Cambridge University Press.

3. **Generalização:** A notação simbólica permite generalizar resultados matemáticos e aplicá-los a uma ampla variedade de situações. Os símbolos facilitam o estudo de estruturas abstratas e conceitos gerais, em vez de se concentrar em casos específicos.

   Referência: Bourbaki, N. (1968). *Elements of Mathematics: Theory of Sets*. Hermann, Paris.

4. **Rigor e consistência:** A matemática simbólica ajuda a garantir rigor e consistência nos argumentos matemáticos e a evitar ambiguidades e mal-entendidos.

   Referência: Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Teubner, Leipzig.

5. **Facilitar cálculos e raciocínio:** Símbolos matemáticos e notações permitem a execução de cálculos complexos e a aplicação de raciocínio dedutivo.

   Referência: Leibniz, G.W. (1679-1685). *Dissertatio de arte combinatoria*. Leipzig.

6. **Desenvolvimento de linguagem formalizada:** A matemática simbólica é a base para a criação de linguagens formalizadas que são essenciais para a lógica, a teoria dos conjuntos e a teoria dos modelos, entre outras áreas.

   Referência: Tarski, A. (1941). *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* Oxford University Press.

7. **Aplicações interdisciplinares:** A notação matemática simbólica é uma linguagem universal que transcende barreiras culturais e linguísticas e facilita a colaboração interdisciplinar e a aplicação da matemática em outras áreas como a física, a engenharia e a ciência da computação *a física, a engenharia e a ciência da computação.*

   Referência: Wigner, E.P. (1960). *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(1), 1-14.

8. **Unificar conceitos**, como, por exemplo, a equação $\mathrm{e}^{\pi \cdot \mathrm{i}} + 1 = 0$.

   Referência: um dos revisores deste artigo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao projeto Livro Aberto https://umlivroaberto.org/ com o qual este estudo iniciou-se. Agradecemos também a Carlos Tomei e a Regina Célia Guapo Pasquini pela leitura e sugestões para o texto!

Referências

[1] ARCAVI, A. (1994). “Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics.” *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

[2] ARCAVI, A. (2005). “Developing and Using Symbol Sense in Mathematics”. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.

[3] Bardi, Jason Socrates. *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time.* Basic Books, 2009.

[4] Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

[5] Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations.*Two volumes. The Open Court Company, 1928.

[6] Cobb, Paul; Yackel, Erna; McClain, Kay. *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design.* Routledge, 2012.

[7] Elias, Norbert. *The Symbol Theory.* SAGE Publications Limited, 1991.

[8] Goodman, Nelson. *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols.* Hackett Publishing, 1976.

[9] Iverson, Kenneth E. *Notation as a Tool of Thought.* ACM Turing Award Lecture, 2007.

[10] Knuth, Donald E. “Two Notes on Notation”. *The American Mathematical Monthly* , v. 99, n° 5, p. 403-422, 1992.

[11] Larson, L. C. *Problem-Solving Through Problems.* New York: Springer,1983 Munzner, Tamara. Visualization Analysis & Design. CRC press, 2014.

[12] Mazur, J. (2014). *Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*. Princeton University Press.

[13] Silver, Naomi. "Reflective Pedagogies and The Metacognitive Turn in College Teaching". In: *Using Reflection and Metacognition to Improve Student Learning*: Across the Disciplines, Across the Academy (2013): p. 1-17.

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
<humbertobortolossi@id.uff.br>

Lhaylla dos Santos Crissaff
Universidade Federal Fluminense
<lhayllacrissaff@id.uff.br>

Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense
<wmrezende@id.uff.br>

Recebido: 05/12/2022
Publicado: 15/06/2023