PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1116

# O pensar matemático no processo de resolução de problemas

Stênio Rocha Silva [1]     Leandro Antunes

**Resumo**

A mente humana, durante o processo de resolução de problemas, pode ser caracterizada por duas formas de raciocínio: uma lógica, mecânica, formal; e outra plausível, temporária, heurística, intuitiva. Neste artigo fazemos um levantamento bibliográfico de diversos matemáticos e educadores com trabalhos relevantes para o tema de resolução de problemas matemáticos, revelando suas experiências e o entendimento sobre a dinâmica humana desse processo. Analisando a resolução de um problema, por mais simples que seja, observa-se que o processo constitui-se de fases decisórias que se intercalam entre as verdades matemáticas e as atitudes heurísticas e intuitivas, principalmente nas fases de planejamento e execução do plano de resolução. Nesse contexto o professor de Matemática, ao adotar a resolução de problemas como estratégia metodológica de ensino, deve realizar experiências de forma a entender quais atitudes e sensações seus alunos irão enfrentar. Dessa forma poderá antecipar-se prevendo orientações prévias e atender as suas dificuldades.

**Palavras-chave:** Problemas Matemáticos; Raciocínio Heurístico; Atitudes Mentais.

**Abstract**

The human mind, during the problem solving process, can be characterized by two forms of reasoning: a logical, mechanical and formal one; and another plausible, temporary, heuristic and intuitive. In this article we carry out a bibliographical survey of several mathematicians and educators with works relevant to the theme of mathematical problem solving, revealing their experiences and understanding of the human dynamics of this process. Analyzing the resolution of a problem, no matter how simple it may be, it is observed that the process consists of decision-making phases that intersperse between mathematical truths and heuristic and intuitive attitudes, mainly in the planning and execution phases of the resolution plan. In this context, the Mathematics teacher, when adopting problem solving as a methodological teaching strategy, must carry out experiments in order to understand which attitudes and sensations his students will face. In this way, he will be able to anticipate, foreseeing previous orientations and attend to his difficulties.

**Keywords:** Mathematical Problems; Heuristic Reasoning; Mental Attitudes.

## 1. Introdução

[1] Egresso do Profmat/UTFPR

Do primitivo processo de contagem de um pastor para garantir que não havia perdido uma de suas ovelhas ao cálculo recente da trajetória de Plutão para permitir a chegada da sonda *New Horizons* aos confins do sistema solar, a história da humanidade mostra uma eterna intimidade do ser humano com a Matemática. Algo além do mero procedimento lógico existe entre os homens e essa área do conhecimento. Muitos problemas foram solucionados em nossa história, muitas mentes estiveram envolvidas em inúmeros desafios da humanidade.

Angariando atitudes de grandes matemáticos na resolução de alguns de seus problemas, em 1900 o matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943) [10], ao proferir uma palestra em Paris, no Congresso Internacional de Matemáticos, listou 23 problemas matemáticos importantes, naquela época ainda não solucionados. Tais problemas passaram a ser desafios: uns foram solucionados quase que imediatamente; outros tiveram que esperar algumas décadas; alguns mais de meio século e ainda existem problemas não solucionados, como a *Hipótese de Riemann*, que conjectura que a distribuição dos números primos não é aleatória.

A diferença entre o trabalho de uma pessoa comum, um aluno ou alguém interessado em Matemática, resolvendo um problema de geometria, álgebra ou aritmética, é análoga ao trabalho de invenção, determinação e demonstração de um matemático – a diferença está no grau e nível. Guardadas essas proporções, o processo de resolução de problemas reserva ao resolvedor atitudes mentais que vão da forma mais simples de raciocínio, habitualmente utilizada no dia a dia das pessoas, ao raciocínio dedutível, lógico e determinista, bem adequado matematicamente.

Paul Zeitz [11, p. 170 ] diferencia problemas de exercícios da seguinte forma: um exercício é uma questão que se sabe resolver imediatamente, bastando aplicar determinadas técnicas, porém sem necessidade de descobrir quais técnicas usar. Por outro lado, um problema é uma situação que exige mais reflexão e engenhosidade antes de a abordagem correta ser encontrada. Naturalmente, seguindo essa definição a diferenciação entre problemas e exercícios é subjetiva, dependendo das experiências e habilidades de quem está resolvendo a questão.

Este artigo é o produto de uma pesquisa de mestrado e resulta da busca de elementos que instrumentalizem o professor em sua prática em sala de aula diante de um cenário heterogêneo, onde cada aluno tem um entendimento único, construído por suas experiências e pelos mecanismos pessoais com que lida com o ensino da Matemática. O propósito deste trabalho é entendermos quais são os aspectos e características envolvidos nas atitudes mentais presentes no processo de resolução de problemas matemáticos e como o professor em sua prática docente pode usar tais fatores, a partir de uma revisão bibliográfica de autores relevantes para o tema.

## 2. Metodologia

Este artigo trata-se de um levantamento bibliográfico de caráter qualitativo. Foram analisados autores com publicações relevantes para o tema, selecionando para este artigo aqueles com contribuições no aspecto metodológico, em especial aqueles que trataram de estratégias, mecanismos e técnicas para a resolução de problemas. Nessa seleção, também levou-se em conta a participação dos autores na organização de Círculos Matemáticos, Olimpíadas de Matemática ou eventos assemelhados.

Priorizaram-se, quanto aos dados observados e revelados pelos autores consultados, aqueles relacionados às atitudes humanas frente ao processo de resolução de problemas combinados com os procedimentos mecânicos e determinísticos, próprios dessa área do conhecimento. Baseados nos dados qualitativos levantados segundo as descrições das situações apresentadas pelos sujeitos, a análise ateve-se às atitudes mentais que são acionadas no resolvedor durante o processo de resolução de problemas explicitadas pelos autores selecionados.

## 3. Raciocínio no Processo de Resolução de Problemas por George Pólya

O matemático húngaro George Pólya (1887 – 1985) é uma figura de destaque no estabelecimento de etapas para resolução de problemas. A obra mais importante de Pólya é *A arte de resolver problemas* [5], de 1945, que não se atém apenas às questões matemáticas, mas também dá um direcionamento ao processo de resolução propriamente dito.

Pólya divide o processo de resolução de problemas em quatro etapas. A primeira etapa é ter uma sólida compreensão do enunciado do problema: suas incógnitas, os dados e condicionante, devendo-se adotar uma notação adequada e traçar figuras ou diagramas buscando uma melhor familiarização com o problema. Nessa etapa também é importante a motivação do resolvedor para encontrar a solução. Por isso, ao adotar a resolução de problemas como estratégia metodológica, cabe ao professor selecionar questões estimulantes a seus alunos, que gerem interesse em sua resolução, não sendo nem muito fáceis, que tenham solução imediata, nem muito difíceis, que não possam ser resolvidos após um esforço considerável.

A segunda etapa consiste na construção de um plano de resolução. Essa etapa é complexa e envolve conhecimentos, percepções e atitudes gerais. O plano construído e revisado permite orientação para sua execução, que é a terceira etapa.

A medida que o desenvolvimento da execução do plano revela sinais de progresso, uma solução aguarda o resolvedor, após o que um reexame de todo o processo deverá ser implementado. Essa última etapa, apesar de extremamente importante para perceber erros, aprimorar processos e implementar soluções melhores, frequentemente é neglicenciada.

Pólya destaca em sua obra o raciocínio desenvolvido durante a elaboração de um plano de resolução para o problema. O encaminhamento de solução surge, provisório, plausível, mas só será considerado útil ao final do processo ou quando o grau de confiança nas escolhas por ele geradas mostrarem sinais inequívocos de sucesso. Os passos propostos por Pólya para a resolução de problemas constituem um método *heurístico*, isto é, trata-se de um método baseado na descoberta e na invenção de técnicas para a resolução. Esse autor associava os passos de um pensamento heurístico aos andaimes utilizados na construção de um edifício: todos eles são necessários, contudo antes mesmo do final da obra eles não estarão mais presentes.

Um aspecto interessante que ocorre na fase de execução do plano de resolução é a percepção dos sinais de progresso. Eles não devem ser ignorados nem adotados como certeza de sucesso, porém qualquer indicador de sucesso estabelece maior ou menor confiança ao resolvedor para decidir sobre continuidade ou revisão do processo de solução.

O conhecimento matemático formal é garantido pelo raciocínio demonstrativo ou dedutível. Por outro lado, as conjecturas, ideias e hipóteses que aparecem durante a resolução de um problema são sustentadas pelo raciocínio plausível ou aceitável. Este tipo de pensamento ocorre também em outras áreas do conhecimento, como no direito, em que a evidência circunstancial está amparada pelo raciocínio plausível, já que muitas vezes não é possível ter certeza de todas as provas e versões apresentadas em um caso.

Apesar da demonstração final de um teorema ser apresentada de uma maneira essencialmente dedutiva, o processo de descoberta do teorema e as tentativas de demonstração combinam observações, analogias, tentativa e erro, mudança de hipóteses, elaboração de figuras e diagramas, constituindo um trabalho essencialmente criativo, análogo ao processo heurístico. A demonstração final é descrita usando o raciocínio dedutivo ou indutivo, contudo há um grau de invenção, intuição, adivinhação ou predição, anterior a essa dedução, isto é, o raciocínio plausível ou aceitável também está presente na matemática formal.

Pólya afirma que esses dois raciocínios, dedutível e heurístico, não são contraditórios. Na verdade, completam-se: é preciso aprender a utilizá-los para o estudo da matemática e, em particular, na resolução de problemas. Nas palavras de Henry Poincaré, "a lógica consciente é apenas parte do processo criativo" [10].

Nos esportes de alto rendimento os aspectos mentais e psicológicos são fundamentais para o sucesso, muito além de uma técnica apurada. E eles oscilam, na mente do esportista, à medida que as coisas acontecem na quadra, na arena, na pista, no tabuleiro de xadrez. É preciso se motivar diante de uma situação adversa, difícil. Um tenista mexeria mais as pernas, gritaria um *Come on!*, um maratonista pensaria no próximo quarteirão, no quilômetro 33, 34... Da mesma forma, cabe ao resolvedor de problemas persistir, perseverar, concentrar-se mais, dar um tempo para si mesmo e retornar a problema posteriormente.

Esses são os elementos que descrevem de forma sucinta o entendimento de George Pólya sobre o processo de resolução de problemas, principalmente no que tange aos processos mentais. O autor exalta o papel da analogia, da indução e da heurística, da invenção para solução dos problemas matemáticos. Por outro lado, é lacônico quanto ao papel da intuição nesse processo, tratando essa questão como tema para discussões filosóficas.

## 4. A arte de resolver problemas segundo Paul Zeitz

Paul Zeitz, nascido em 1958, é um matemático americano que venceu a Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos (Usamo) e integrou a equipe americana que competiu na primeira Olimpíada de Matemática Internacional (IMO). Zeitz atuou na elaboração de problemas para competições e no treinamento de equipes e escreveu em 1999 o livro *The art and craft of problem solving* [11] com diversas técnicas para a resolução de problemas matemáticos.

Para Zeitz, o processo de investigação assume diversas formas e pode ser iniciado por exemplo com uma intuição, uma ideia inicial, uma ideia brilhante ou com uma analogia com um outro problema. Se o resolvedor não é experiente, Zeitz afirma que ele deve munir-se de mais elementos para tornar sua abordagem mais organizada e dar passadas mais seguras. A ajuda pode ser necessária, mas a insistência do resolvedor é fundamental, tornando imprescindível que o problema a ser resolvido seja prazeroso e motivador.

A obra de Zeitz valoriza estratégias psicológicas, ligadas à obstinação e à persistência. Para o autor, a motivação para a resolução do problema é fundamental, já que não faz sentido que alguém deseje solucionar um problema sem a vontade imperiosa de fazê-lo. Por outro lado, afirma que deve haver confiança de que é possível obter sucesso, e para tal é preciso criar condições para que a solução seja possível dividindo o problema, modificando a abordagem, caso ela esteja sendo aplicada há muito tempo sem resultados.

Outro aspecto de destaque para a resolução de problemas em [11] é a concentração: o foco no problema, seus objetos e suas definições, suas estratégias e a execução do plano. Também a criatividade é fundamental: estar aberto a novas ideias, com atenção às oportunidades no ambiente do problema.

## 5. Algumas estratégias para a Resolução de Problemas segundo Posamentier

Alfred S. Posamentier (nascido em 1942) é outro matemático e educador que se dedicou ao tema resolução de problemas. Posamentier possui mais de oitenta livros em que figura como autor ou coautor, tratando, além da resolução de problemas, temas como geometria euclidiana, curiosidades matemáticas, livros voltados a professores de matemática e história da matemática.

Posamentier também editou o livro *The art of problem solving: a resource for the Mathematics teacher* [9], em 1996, em parceria com Wolfgang Schulz. Nesse livro são abordadas diversas estratégias para a resolução de problemas, como trabalhar de trás para frente, mudar o ponto de vista, considerar casos extremos, usar aproximações, determinar característica dos objetos, dentre outras.

Duas obras interessantes foram publicadas em 1970, com Charles T. Salkind (1898 – 1968): *Challenging problems in algebra* [7] e *Challenging problems in geometry* [8] nas quais além de fazer uma coletânea de diversos problemas com suas soluções, aponta para um cuidadoso e selecionado uso da analogia para resolução de problemas em geometria e álgebra, respectivamente. Algumas estratégias para a resolução de problemas mencionadas nesses dois livros são:

1. Utilizar a analogia do problema com outros problemas conhecidos e verificar a existência de padrões ou similaridades;

2. Ter flexibilidade no uso de abordagens, adotando algumas menos familiares quando necessário;

3. Descobrir se o resultado das manipulações efetuadas faz ou não sentido;

4. Verificar se a resposta para o problema é ou não única;

5. Utilizar estimativas para verificar erros grosseiros na resposta;

6. Checar possíveis restrições para os dados ou resultados;

7. Resolver um caso particular antes do caso geral ou generalizar um problema quando o caso específico for difícil de ser atacado diretamente.

## 6. Analogias, generalizações e especificações

A utilização de analogias aparece como uma das principais estratégias para a resolução de problemas em livros de diversos autores. George Pólya a considera uma poderosa ferramenta, permeando as argumentações, os pensamentos e as conclusões cotidianas. Segundo ele, as analogias podem ser imprecisas e incompletas, mas podem tornar-se matematicamente rigorosas, servindo como ferramenta na resolução de problemas.

Há diferenças entre a analogia e outras formas de similaridades que são produzidas de acordo com as reais intensões na mente do observador. A analogia estabelecida por um poeta é contemplativa por natureza. Já um naturalista encontra sugestiva analogia entre a mão humana, a pata de um gato ou a nadadeira de uma baleia.

Analogia concorre com dois outros conceitos: generalização e especialização. Na generalização parte-se de uma consideração sobre um dado conjunto de objetos para outros mais amplos, como de triângulos para polígonos com arbitrário número de lados. Já na especialização parte-se de uma consideração sobre um conjunto de objetos para outro menor, como passamos de polígonos para polígonos regulares.

Esses dois conceitos, generalização e especialização, com a percepções de analogias, orientam operações mentais, gerando descobertas que podem auxiliar na resolução de problemas. A construção de conhecimentos através da analogia é muito utilizada para facilitar a compreensão de temas complexos como por exemplo a eletricidade, que encontra correspondência com a hidrodinâmica.

## 7. O papel da intuição na resolução de problemas

Os matemáticos têm uma maneira muito especial de lidar com os problemas. Segundo Jacques Salomon Hadamard [2, p. 28-29], Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), em uma conferência na Sociedade de Psicologia de Paris a respeito da invenção na matemática, revelou suas experiências na resolução de problemas:

> *Certa noite, contrariando meus hábitos, tomei café puro e não consegui pegar no sono; as ideias surgiram aos borbotões; eu tinha a impressão de que se chocavam, até duas conseguirem se ligar para formar uma combinação estável.*

O relato de Poincaré mostra as contribuições do inconsciente no desenvolvimento da sua maneira de resolver problemas. Interessante observar o que Hadamard [2, p. 29] também relata sobre as experiências de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855):

> *Finalmente, há dois anos, consegui. Não como resultado de meus esforços, mas graças a Deus. O enigma foi resolvido num raio súbito. Não sei dizer qual foi a natureza do fio condutor que ligou o que eu já sabia com o que tornou possível o meu sucesso.*

A intuição matemática é destacada por Poincaré como tendo lugar especial no ensino da Matemática ao, lado da lógica. A intuição desempenha papel de guia juntamente com a analogia como estratégia para resolução de problemas. É estimulada e enriquecida pelas experiências do resolvedor funcionando como instrumento da invenção.

Uma contribuição importante para o processo de resolução de problemas foi estabelecida pelo matemático britânico Alan Turing (1912 – 1954), considerado um dos pais da ciência da computação. Um dos principais objetos de pesquisa de Turing foi a lógica e os imbricados aspectos da escola formalista de David Hilbert (1862 – 1943), outro importante matemático atuante na primeira metade do século XX. Segundo Teresa Numérico [4] Hilbert acreditava que era possível criar um sistema formal que provasse todos os teoremas matemáticos. Porém, os resultados provados por Turing e por Kurt Gödel (1906 – 1978) mostraram a impossibilidade da realização de tal feito. Os Teoremas da Incompletude de Gödel mostraram que um sistema axiomático recursivamente enumerável não pode ser simultaneamente consistente, isto é, sem contradições, e completo, ou seja, capaz de classificar em verdadeira ou falsa qualquer afirmação dentro da teoria. Turing demonstrou um teorema análogo para a computação, relativo à impossibilidade da existência de um algoritmo capaz de resolver o Problema da Parada para todos os pares de programas e entradas possíveis.

Os elementos matemáticos discutidos por Turing e Gödel estão fora do escopo deste artigo, contudo as discussões são interessantes pois giraram em torno de algoritmos e da mente humana [1]. A existência de um sistema formal que atendesse aos interesses de Hilbert eliminaria o papel da intuição e da heurística na descoberta matemática. A necessidade de intuição, por exemplo, estaria totalmente eliminada desse processo. Contudo, Turing dizia [4]:

> *Em consequência da impossibilidade de encontrar uma lógica formal que elimine totalmente a necessidade de usar a intuição, voltamo-nos naturalmente para 'sistemas não construtivos' de lógica com os quais nem todos os passos de uma prova são mecânicos, sendo alguns intuitivos.*

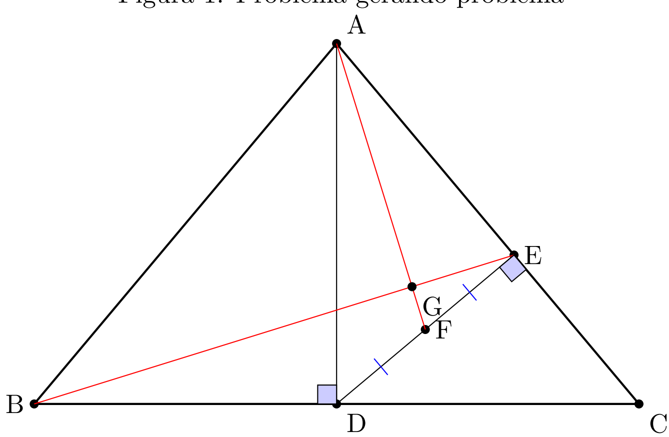
O resultado estava de acordo com a percepção de Turing de que era improvável que a demonstração de teoremas pudesse ser efetivada sem o uso de intuição e heurística.

## 8. Resolução e o Pensar Matemático

Para exemplificar as diversas atitudes mentais durante o processo de resolução de problemas, utilizaremos alguns exemplos encontrados na literatura. O primeiro problema foi proposto por Paul Zeitz em [11].

**Problema 1.** Seja ABC um triângulo isósceles com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Uma perpendicular do ponto A para $\overline{BC}$, encontra BC em D. Uma perpendicular de D para AC, encontra AC em E. Seja F o ponto médio de ED. Prove que AF $\perp$ BE.

Figura 1: Problema gerando problema




Como Zeitz e outros autores sugerem, a construção da figura 1 é importantíssima para a compreensão do problema em seu cenário geométrico. Há vários triângulos retângulos na figura 1. É tentadora a procura por semelhanças de triângulos associada aos segmentos BE e AF. Zeitz (2021) sugere explorar de forma implacável a existência de triângulos semelhantes. Se a intuição apontar para a existência desses objetos, Zeitz sugere perseguir a ideia. Apesar da ótima sugestão, uma minuciosa verificação não identifica, *a priori*, uma relação adequada envolvendo os segmentos AF e BE. Uma nova ideia deve ser encontrada.

Mais uma vez Zeitz (2021) sugere que os melhores amigos do resolvedor de problemas geométricos são: triângulos retângulos, retas paralelas e pontos na circunferência. Deles extraem-se uma variedade de relações entre os objetos aos quais estão associados.

Tal problema está recheado de triângulos retângulos cuja possibilidade de semelhança já foi avaliada. É preciso encontrar uma forma de identificar segmentos perpendiculares se não há como identificar semelhança entre os triângulos retângulos existentes e aqueles triângulos formados pelos segmentos AF e BE.

Uma propriedade interessante relacionada a triângulos retângulos inscritos em circunferências é quando a hipotenusa é o diâmetro da circunferência, daí o vértice oposto à hipotenusa é formado por um ângulo reto.

A figura 1 não possui circunferências, assim uma precisa ser construída, e, para atender a propriedade em que se sustenta a nova ideia, deve ter como diâmetro o segmento AB. Esse forma o triângulo retângulo ABD e o triângulo AGB, que pode ser retângulo.

A circunferência $\omega$ é traçada pelo ponto médio de AB, hipotenusa, e o triângulo ABD esta inscrito, conforme figura 2.

Observando a figura 2, para que AF $\perp$ BE, o ponto G deve pertencer à circunferência $\omega$, o triângulo AGB será retângulo, o $\angle$AGB = 90º e então AF $\perp$ BE.

Mas, como chegar até esse resultado? Observando o arco DG, dois ângulos inscritos em $\omega$ submetem-se a ele, $\angle$DAG e $\angle$DBG e portanto são iguais. Dessa forma, para que o ponto G esteja na circunferência, $\omega$, $\angle$DAG = $\angle$DBG. E assim tem-se uma solução!

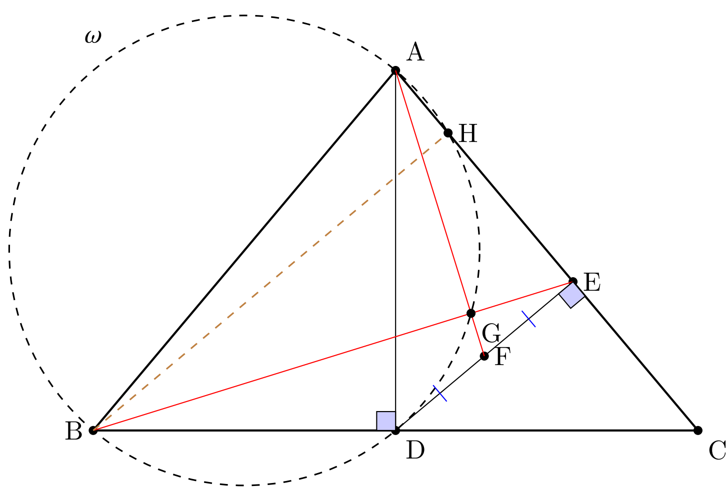



Figura 2: (ZEITZ, 2017, p.291, reprodução e adaptação nossa).

Mas, como chegar a tal resultado? Observa-se que o problema mudou, agora buscamos a igualdade $\angle$DAG = $\angle$DBG. Há muitos segmentos, mas vamos trabalhar com os triângulos. Observando o triângulo DEC, retângulo, pode-se construir um outro triângulo retângulo se for traçada a altura do triângulo ABC pelo vértice B incindindo sobre AC no ponto H. Tem-se $\triangle$BHC $\approx$ $\triangle$DEC, semelhantes pois possuem ângulos retos e um ângulo comum, $\widehat{DCE}$.

Observa-se ainda no triângulo DEC que os ângulos $\widehat{EDC}$ e $\widehat{DCE}$ são complementares, e assim $\angle$ADE = $\angle$DCE, o que torna os triângulos ADE e BHC, semelhantes. Em virtude desse resultado o triângulo ADF, formado pela mediana AF de △ADE, e o triângulo BCE, formado pela mediana de △BHC, são semelhantes o que faz com que ∠GAD = ∠GBD.

O próximo exemplo é um problema proposto por George Pólya em [5].

**Problema 2.** Inscrever um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo, e os dois outros vértices sobre os dois outros lados do triângulo, um em cada.

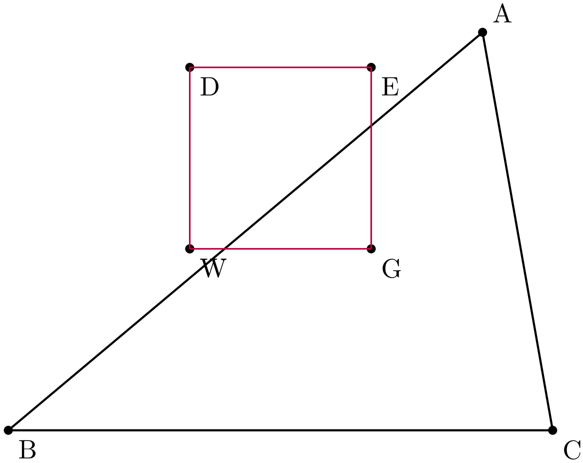



Figura 3: Desenvolvimento nosso.

A figura 3, como anteriormente, um passo importante para a melhor compreensão do problema. O cenário é constituído de um triângulo e um quadrado que se localizará numa posição bem específica, segundo a condicionante.

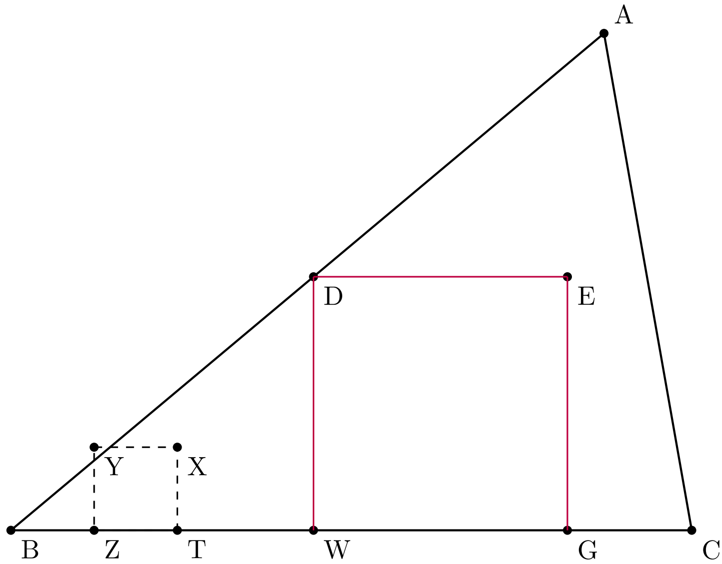



Figura 4: Desenvolvimento nosso.

Desenhando um quadrado qualquer sobre a base do triângulo da figura 4, observa-se que, independentemente do tamanho, ajustes são necessários para cumprir parte da condicionante. Primeiro dois vértices são atendidos com a base do quadrado sobre a base do triângulo. Um outro ajuste permitirá que o outro vértice situe-se sobre um dos lados, assim pelo menos três pontos (os vértices do quadrado) atenderiam à condicionante.

Esse procedimento intuitivo conduzirá a um importante passo para a solução deste problema. Pode o resolvedor evitá-lo, procurando encaixar os quatro vértices do quadrado segundo a condicionante do problema proposto. Tal atitude retardará a fase de planejamento da resolução, a menos que se tenha em mente outro caminho! Uma ideia brilhante!

Observando a figura 4 tem-se o quadrado DEGW com três de seus vértices cumprindo a condicionante do problema. O terceiro vértice, E, dista igualmente de um ponto do lado AB e do lado BC.

Na figura 5, tem-se que o quadrado ILMH, onde o vértice L goza da mesma propriedade, ou seja, o ponto L dista igualmente de um ponto do lado AB e do lado BC.

Intuitivamente pode-se concluir que existe um ponto no lado AC equidistante de um ponto do lado AB e do lado BC. Agora, de forma indutiva, se for traçada uma reta entre os pontos L e E, LE, essa deve conter todos os pontos equidistantes dos pontos do lado AB e do lado AC. Eis que descobre-se um *lugar geométrico*. E a interseção da reta LE com o lado AC no ponto Z, define o vértice do quadrado que atende integralmente à condicionante do problema.

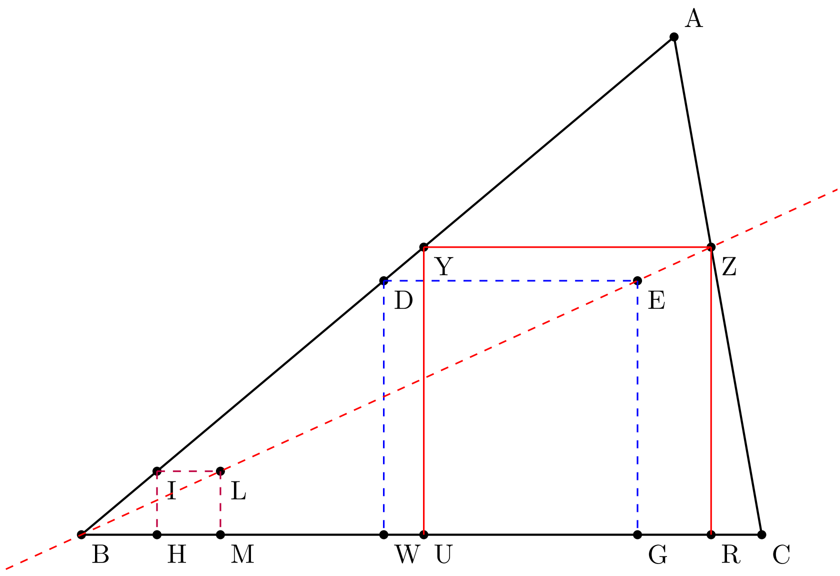



Figura 5: (Pólya, 2006, p.03, reprodução nossa).

O próximo exemplo, também devido a Pólya [5, P. 121] ilustra os procedimentos inventivos num problema de determinação algébrico.

**Problema 3.** Determinar o valor de x que satisfaz a equação:

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Inicialmente procurar a compreensão, que apesar da simplicidade da informação apresentada, merece atenção, sempre. Tem-se soma de exponenciais com expoentes diferentes o que é um complicador e exige uma atuação facilitadora para o desenvolvimento algébrico.

$$4^x + 4^{-x}$$

$$2^x + 2^{-x}$$

Pode inicialmente parecer assustador para um principiante, contudo algumas simplificações podem melhor esclarecer.

$$4^x = (2^x)^2$$

$$4^{-x} = (2^x)^{-2}$$

Uma primeira invenção, que pode parecer uma mágica, um truque, mas foi desenvolvida por uma mente que percebeu uma ideia brilhante.

$$y = 2^x$$

O resultado parece vantajoso pois a equação modificou-se e seu tratamento parece mais atrativo.

$$8(y^2 + \frac{1}{y^2}) - 54(y + \frac{1}{y}) + 101 = 0$$

Entretanto, nesse ponto o resolvedor não sabe ainda a condução da invenção inicial. É provável que seu raciocínio heurístico, como expressava Pólya, apontava para o sucesso e ele teria que criar mais uma invenção.

$$z = y + \frac{1}{y}$$

$$z^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$$

$$8z^2 - 54z + 85 = 0$$

Aqui se finaliza, pois o trabalho agora é conduzido por atividades mecânicas para resolver a equação do segundo grau, em z, o que significa efetuar cálculos utilizando um algoritmo já de domínio dos alunos, em tese.

## 9. Conclusão

O que ficou evidente, neste rol de contribuições, foi que os recursos mentais acionados pelos diversos mecanismos à disposição do ser humano neste processo são constituídos de dois tipos de raciocínio: o plausível, de um lado, e o dedutível, demonstrativo, determinista e lógico, do outro. A combinação dessas atitudes permite muita flexibilidade e elasticidade ao processo, tornando o erro e o resultado das tentativas uma forma de aprendizado.

Observa-se entre os autores uma ênfase na presença da intuição e heurística, no pensar matemático. Isso não é unânime: Pólya, por exemplo, pouco se apoia na intuição, prefere a analogia e heurística. Contudo, para todos, a falta desses elementos mentais tornam mecânico o processo. Lógica, intuição, heurística, percepções de similaridade e atitudes inventivas, devem caminhar juntas.

Como essas atitudes são executadas nas diversas experiências do dia a dia do ser humano e sujeitas a seus vícios e descuidos, alguns autores sugerem atenção aos excessos exigindo ponderação e controle. No entanto, a experiência modela essas sensações e percepções garantindo confiança e autonomia.

Analisando a resolução de um problema, por mais simples que seja, observa-se que o processo constitui-se de fases decisórias que se intercalam entre as verdades matemáticas e as atitudes heurísticas e intuitivas, principalmente nas fases de planejamento e execução do plano de resolução. Tal comportamento de uma maneira geral se ajusta aos diversos argumentos defendidos pelos autores consultados, que associam a lógica matemática às impulsivas e provisórias atitudes mentais.

Nesse contexto o professor deve experimentar, principalmente as atividades panejadas e destinadas aos seus alunos, de forma a entender quais atitudes e sensações eles vão enfrentar. Dessa forma poderá antecipar-se, prevendo orientações prévias e atender às dificuldades do grupo.

Este trabalho apresentou diversas sensações inerentes ao resolvedor de problemas matemáticos descritas por indivíduos que as conhecem, vivenciaram e sabem identificá-las nos sujeitos sob sua atenção. Em trabalhos futuros, pretendemos propor atividades onde seja possível uma identificação mais amiúde em grupos de alunos, solucionando problemas em condições específicas, visando melhor instrumentalizar o professor em sala de aula.

## Referências

[1] COPELAND, B. Jack and Shagrir, Oron. *Turing versus Gödel on computability and mind.* In: COPELAND, B. Jack; POSY, Carl J. and SHAGRIR Oran. (Ed.) Computability Turing, Gödel, Church, and beyond. London: MIT, 2015. p. 1-33.

[2] HADAMARD, J. *Psicologia da invenção na matemática.* Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

[3] MARINHO, E. E. S. *Intuição matemática.* 2019. 79 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – Profmat) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

[4] NUMÉRICO T. *From Turing machine to 'electronic brain'. In*: COPELAND, B. Jack and al.(Ed.) Alan Turing's electronic brain. The struggle to build the ACE, the world's fastest computer. New York: Oxford, 2012. p. 173-192.

[5] PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[6] PÓLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning*: induction and analogy in mathematics. Princeton, New Jersey: Martino Fine Books, 2014.

[7] POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. *Challenging problems in algebra.* New York: Courier Corporation, 2012.

[8] POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. *Challenging problems in geometry.* New York: Courier Corporation, 2012.

[9] POSAMENTIER, A. S.; SCHULZ, W. (Ed.) *The art of problem solving*: a resource for the Mathematics teacher. Thousand Oaks: Corwin Press, 1996.

[10] STEWART, I. *Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos.* Rio de Janeiro, RJ: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014.

[11] ZEITZ, P. *The art and craft of problem solving.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2021.

Stênio Rocha Silva [2]
<stenio@creapr.org.br>

Leandro Antunes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<leandroantunes@utfpr.br>

Recebido: 05/02/2023
Publicado: 22/06/2023

[2] Egresso do Profmat/UTFPR