PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1117

Uma experiência concreta na Aritmética Modular: Chryzodes.

Dionatan Miguel Fiorin Konageski[1]   Mari Sano

Resumo

A Aritmética Modular possui inúmeras aplicações na educação básica. Este trabalho tem como objetivo aplicar de forma lúdica o conteúdo dessa teoria nos Chryzodes. Com essa aplicação procuramos mostrar uma maneira diferente de trabalhar a Aritmética Modular em sala de aula, maneira essa que irá proporcionar ao educando participar de forma mais ativa das aulas, despertando o seu interesse na Matemática.

Palavras-chave: Números Inteiros; Congruência; Chryzodes.

Abstract

Modular arithmetic has numerous applications in elementary school. The aim of this work is to playfully apply the content of this theory in Chryzodes. With this application we seek to show a different way of working Modular Arithmetic in the classroom, which will provide the student with an pleasant way to participate in classes and awakening its interest in Mathematics.

Keywords: Integer numbers; Congruence; Chryzodes.

1. Introdução

A Aritmética Modular é uma aritmética que envolve apenas os números inteiros e auxilia na resolução de diversos problemas. Essa aritmética pode ser introduzida no ensino básico com o uso do relógio analógico. Além dessa aplicação, existem muitas outras que também podem ser trabalhadas. Um dos principais objetivos deste trabalho é fornecer ferramentas que permitam que os alunos de educação básica e Licenciatura em Matemática aprendam e visualizem a importância da Aritmética Modular.

Cientes das diversas dificuldades presentes no ensino-aprendizagem da Matemática procuramos desenvolver propostas de aulas mais atrativas, isto é, buscamos uma metodologia de ensino diferenciada para motivar e estimular a participação do aluno nas aulas de Matemática.

Diante disso, propomos neste trabalho, produto da dissertação "*Experiências concretas na Aritmética Modular*", do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat [4], a

[1]Parcialmente apoiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

introdução de uma atividade através de assuntos relacionados com a Aritmética Modular que instiguem a curiosidade dos alunos. Além de proporcionar uma visão ampla acerca dos conteúdos e mostrar que existem elementos de ligação entre os mesmos, conforme é dito nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

,

> ⋯ *muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.* (BRASIL, 1998, p.22 e p.23)

Nesse sentido, o presente trabalho desenvolve o conteúdo de congruências por meio da construção de Chryzodes, baseado em [1], no qual são retomadas as noções de perímetro de uma circunferência, arco de circunferência e o cálculo de seu comprimento – relacionando desta forma assuntos da geometria e aritmética. Para outras formas de desenhos modulares, o(a) leitor(a) interessado(a) pode consultar [5].

Com o intuito de obter uma melhor visualização, foi feita a construção de vários Chryzodes, e, em um caso particular, realizado o passo a passo dessa construção. Também foi usado o *software* Chryzodus a fim de produzir alguns Chryzodes. Ainda, foram desenvolvidos dois vídeos: um com o *software* Wolfram CDF Player, que mostra de maneira dinâmica a construção de diferentes Chryzodes, e o outro com o *software* FRAQTIVE, no qual pode ser observado o Conjunto de Mandelbrot para alguns casos.

2. Aritmética Modular e Chryzodes

Nesta seção, abordaremos inicialmente, de forma sucinta, o conceito de congruência e suas propriedades, para logo apresentar uma das suas aplicações: Chryzodes. Uma abordagem ampla da teoria de Aritmética Modular pode ser encontrada em [3].

2.1. Congruências

O conceito de congruência, assim como a notação, foi introduzido por Johann Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$ em um livro publicado em 1801, intitulado *Disquisitiones Arithmeticae*.

No livro, Gauss apresentou a primeira demonstração da *Lei da Reciprocidade Quadrática* e desenvolveu a teoria das formas quadráticas binárias, entre outros.

Definição 1. Se a, b e m são inteiros, dizemos que a é congruente a b módulo m, para $m > 1$, se $m \mid (a-b)$. Ao qual denotaremos por $a \equiv b \pmod{m}$.

Por outro lado, se $m \nmid (a-b)$, dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos por $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 1.

- $15 \equiv 3 \pmod{2}$, pois $2 \mid (15-3)$;

- $19 \not\equiv 7 \pmod 5$, pois $5 \nmid (19-7)$.

Observação 1. Se $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, então $a \equiv b \pmod m$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo resto na divisão euclidiana por m. Portanto, uma outra maneira de comprovar que $15 \equiv 3 \pmod 2$ é verificando que os restos da divisão de 15 e de 3 por 2 são iguais a 1.

As Proposições que enunciaremos e demonstraremos a seguir apresentam algumas propriedades elementares das Congruências.

Proposição 1. *Se* $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$*, com* $m > 1$*, então:*

i) $a \equiv a \pmod m$ *(propriedade reflexiva);*

ii) Se $a \equiv b \pmod m$*, então* $b \equiv a \pmod m$ *(propriedade simétrica);*

iii) Se $a \equiv b \pmod m$ *e* $b \equiv c \pmod m$*, então* $a \equiv c \pmod m$ *(propriedade transitiva).*

Demonstração. *i)* Como $m \mid 0$, temos que $m \mid (a-a)$. Logo, $a \equiv a \pmod m$.

ii) Se $a \equiv b \pmod m$, então $m \mid (a-b)$. Assim, $m \mid (b-a)$, isto é, $b \equiv a \pmod m$.

iii) Se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$, então $m \mid (a-b)$ e $m \mid (b-c)$. Portanto, $m \mid (a-b)+(b-c)$, o que é equivalente a $m \mid (a-c)$. Dessa forma, $a \equiv c \pmod m$.

□

Proposição 2. *Se* $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$*, com* $m > 1$*, são tais que* $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$*, então:*

i) $a + c \equiv b + d \pmod m$*;*

ii) $a - c \equiv b - d \pmod m$*;*

iii) $ac \equiv bd \pmod m$*.*

Demonstração. De $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$ temos que existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a - b = k_1 m; \tag{1}$$

$$c - d = k_2 m. \tag{2}$$

i) Somando as igualdades (1) e (2), obtemos $(a+c)-(b+d) = (k_1+k_2)m$, e isso implica que $a + c \equiv b + d \pmod m$.

ii) Subtraindo as igualdades (1) e (2), segue que $(a-b)-(c-d) = (k_1-k_2)m$. Logo, $a - c \equiv b - d \pmod m$.

iii) Multiplicando a igualdade (1) por c e a igualdade (2) por b, temos que $ac-bc = ck_1m$ e $bc-bd = bk_2m$. Agora, somando as últimas duas igualdades obtemos $ac-bc+bc-bd = (ck_1+bk_2)m$. De onde, $ac \equiv bd \pmod m$.

□

Observação 2. Se $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, são tais que $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, para todo inteiro positivo n, o qual pode ser demonstrado usando a terceira propriedade da Proposição 2 e o Princípio da Indução.

A primeira Proposição afirma que a congruência é uma relação de equivalência, e a segunda nos diz que a congruência é compatível com as operações de soma, diferença e produto nos inteiros.

Exemplo 2. Determine o resto da divisão de $1! + 2! + \cdots + 50! + 20^{321}$ por 21.

Solução. Para $n \geq 7$, temos que $n! \equiv 0 \pmod{21}$. Logo,

$$\begin{aligned} 1! + 2! + \cdots + 50! &\equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 0 + \cdots + 0 \pmod{21} \\ &\equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 \pmod{21} \\ &\equiv 12 \pmod{21}. \end{aligned}$$

Como $20 \equiv -1 \pmod{21}$, segue que $20^{321} \equiv -1 \pmod{21}$. Assim, $1! + 2! + \cdots + 50! + 20^{321} \equiv 11 \pmod{21}$ e o resto da divisão de $1! + 2! + \cdots + 50! + 20^{321}$ por 21 é 11.

2.2. Chryzodes

A palavra Chryzode deriva do grego "Chrysos"(escrito em ouro) e "zooide"(círculo), ou seja, escrita de ouro em um círculo, e são as representações geométricas e gráficas de números e operações aritméticas modulares por meio de uma circunferência dividida em arcos iguais [1].

Uma maneira de construirmos um Chryzode é marcar m pontos sobre uma circunferência de modo a dividi-la em m arcos congruentes e, em seguida, ordenar e numerar esses pontos de 0 a $m - 1$. Feito isso, escolhemos um número natural a, que multiplicará a sequência de números 1, 2, 3, 4, 5, …, $m - 1$. Logo, determinamos as congruências módulo m para essa sequência de números:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &\equiv b_1 \pmod{m}; \\ a \cdot 2 &\equiv b_2 \pmod{m}; \\ a \cdot 3 &\equiv b_3 \pmod{m}; \\ &\vdots \\ a \cdot (m-2) &\equiv b_{m-2} \pmod{m}; \\ a \cdot (m-1) &\equiv b_{m-1} \pmod{m}. \end{aligned}$$

Por fim, para obter o Chryzode, basta ligar cada ponto correspondente aos números da sequência $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, m - 1$ com o respectivo valor congruente em módulo m. Ou seja, unindo os pontos 1 com b_1, 2 com b_2, 3 com b_3, e assim sucessivamente, teremos um conjunto de linhas desenhadas no círculo inicial, que forma o Chryzode dado pelo fator multiplicativo a, considerando a conguência módulo m.

O Chryzode pode ser representado desenhando as linhas ou plotando com um computador apenas os pontos de intersecção entre as linhas (quando o número de linhas for muito grande). Para essa finalidade podemos utilizar o *software* Chryzodus, disponível em:

https://chryzodus-a-chryzode-explorer.soft112.com.

Assim, podemos desenhar diferentes Chryzodes. Para isso basta variar o valor de a e de m. No seguinte exemplo construiremos um Chryzode, utilizando a explicação acima.

Exemplo 3. Vamos desenhar o Chryzode representando a multiplicação por 2 no módulo 11.

Para a = 2 e m = 11, temos que

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 &\equiv 2 \pmod{11};\\
2 \cdot 2 &\equiv 4 \pmod{11};\\
2 \cdot 3 &\equiv 6 \pmod{11};\\
2 \cdot 4 &\equiv 8 \pmod{11};\\
2 \cdot 5 &\equiv 10 \pmod{11};\\
2 \cdot 6 &\equiv 1 \pmod{11};\\
2 \cdot 7 &\equiv 3 \pmod{11};\\
2 \cdot 8 &\equiv 5 \pmod{11};\\
2 \cdot 9 &\equiv 7 \pmod{11};\\
2 \cdot 10 &\equiv 9 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Logo, desenhamos uma linha de cada número da sequência $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ com o respectivo valor da multiplicação por 2 módulo 11, isto é, uma linha de 1 à 2, de 2 à 4, de 3 à 6, de 4 à 8, de 5 à 10, de 6 à 1, de 7 à 3, de 8 à 5, de 9 à 7 e de 10 à 9. O resultado da construção do Chryzode é mostrado na Figura 1.

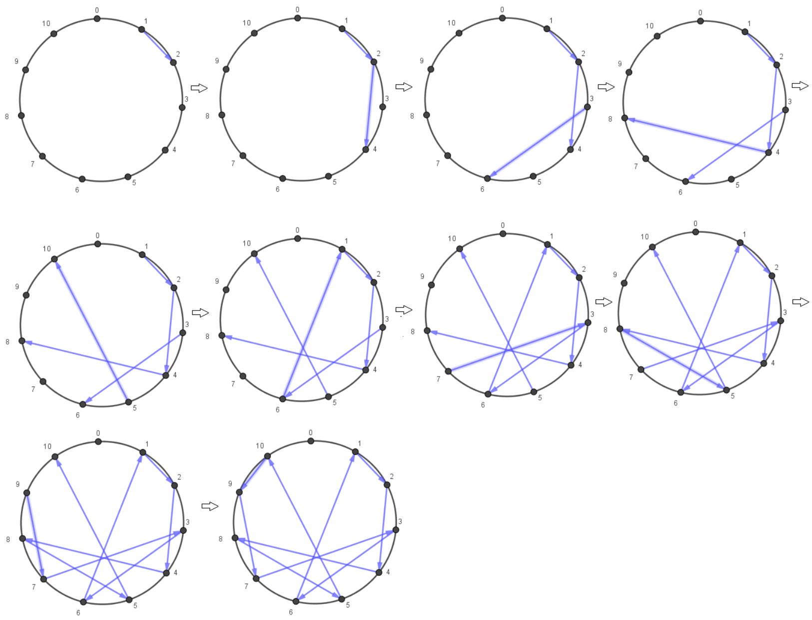

Figura 1: Chryzode, produto por 2 no módulo 11, em linha.
Fonte: Os autores

No *software* Chryzodus, obtemos o resultado conforme a Figura 2.

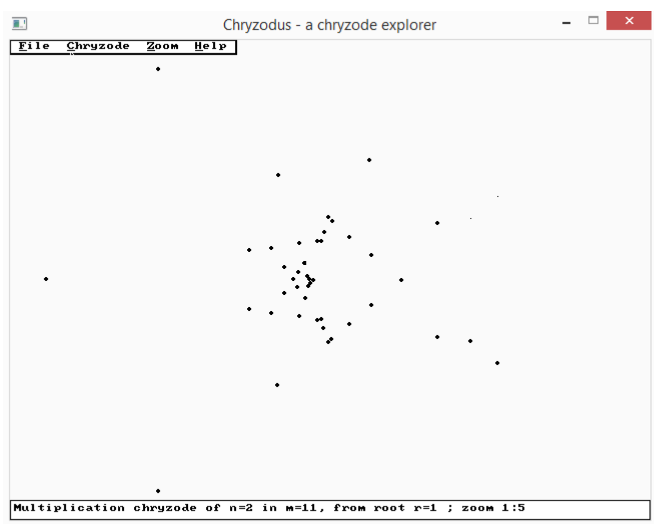

Figura 2: Pontos de interseção das linhas do Chryzode, produto por 2 no módulo 11 obtido pelo *software* Chryzodus.
Fonte: Os autores

Para uma melhor visualização vamos "esconder"a circunferência e, para um mesmo valor de a, variar o valor de m (do módulo). Dessa forma, teremos os Chryzodes para módulo 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 30, 40, 50 e 70. Conforme podemos visualizar nas Figuras 3 à 13.

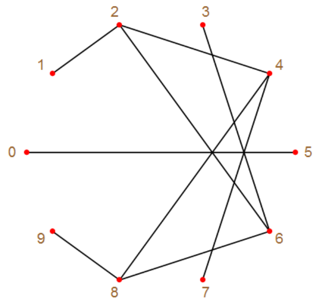

Figura 3: Chryzode, produto por 2 no módulo 10.
Fonte: Os autores

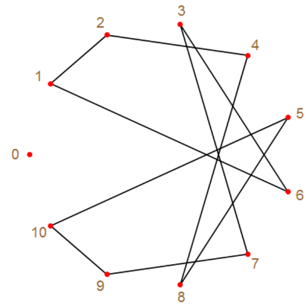

Figura 4: Chryzode, produto por 2 no módulo 11.
Fonte: Os autores

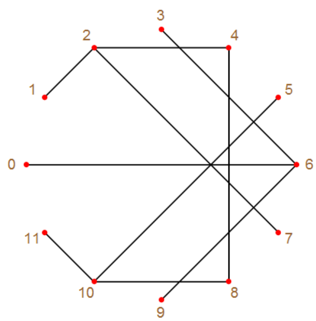

Figura 5: Chryzode, produto por 2 no módulo 12.
Fonte: Os autores

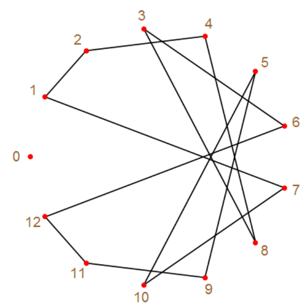

Figura 6: Chryzode, produto por 2 no módulo 13.
Fonte: Os autores

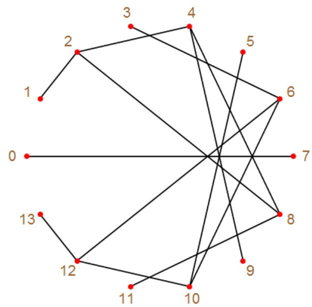

Figura 7: Chryzode, produto por 2 no módulo 14. Fonte: Os autores

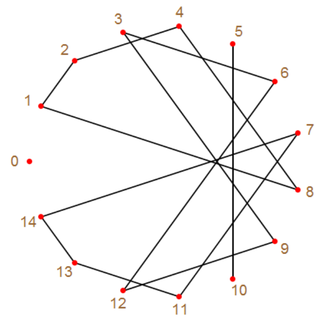

Figura 8: Chryzode, produto por 2 no módulo 15. Fonte: Os autores

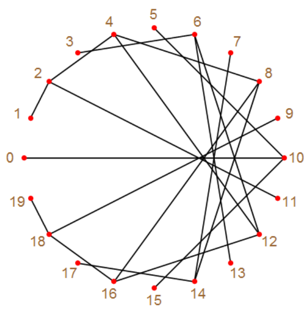

Figura 9: Chryzode, produto por 2 no módulo 20. Fonte: Os autores

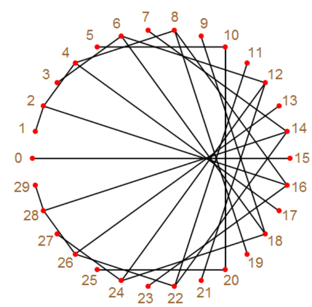

Figura 10: Chryzode, produto por 2 no módulo 30. Fonte: Os autores

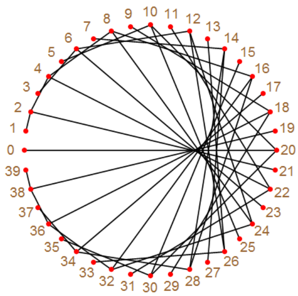

Figura 11: Chryzode, produto por 2 no módulo 40.
Fonte: Os autores

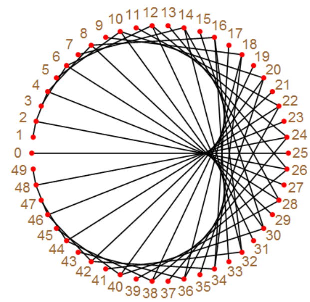

Figura 12: Chryzode, produto por 2 no módulo 50.
Fonte: Os autores

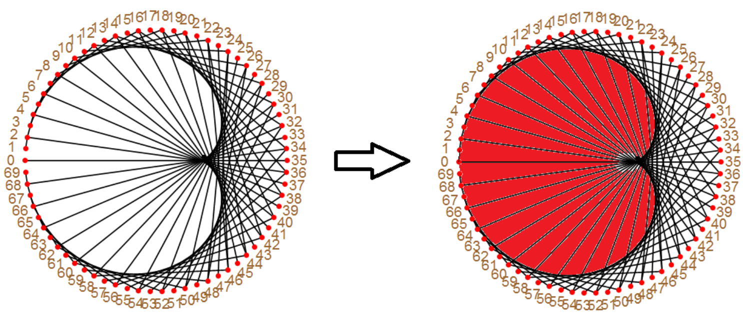

Figura 13: Chryzode, produto por 2 no módulo 70.
Fonte: Os autores

Lembremos que, dada uma família de retas, uma *envolvente* é uma curva tal que a sua reta tangente em cada ponto pertence à familia de retas dada (veja, por exemplo, [7]). A curva em forma de coração nas Figuras 7 à 13 é uma envolvente desse tipo de Chryzoides, que por tal razão recebe o nome do *cardioide*, que também aparece no conjunto de Mandelbrot[2] do tipo $z^2 + c$, veja Figura 14.

No *software* Chryzodus, quanto maior o valor de m e com as cores certas, a construção de Chryzode fornece um *cardioide* como curva envolvente mais definida, como mostra a Figura 15.

[2]Foge do escopo deste trabalho definir e demonstrar propriedades desse conjunto. Mas para aguçar o interesse do(a) leitor(a), o Conjunto de Mandelbrot é um fractal definido como o conjunto de pontos c no plano complexo para o qual a sequência $z_k = f(z_{k-1})$, onde $f(z) = z^n + c$ e $z_0 = 0$, não tende a infinito. Ou pode ser consultado em [6].

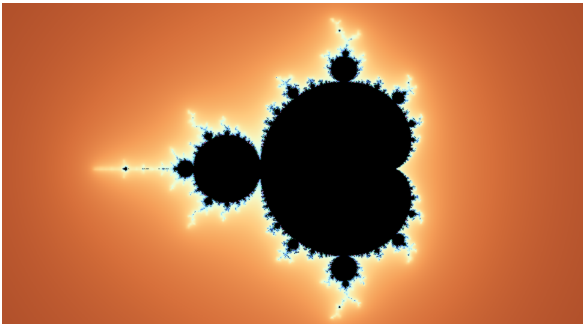

Figura 14: Conjunto de Mandelbrot do tipo z^2 + c.
Fonte: Os autores

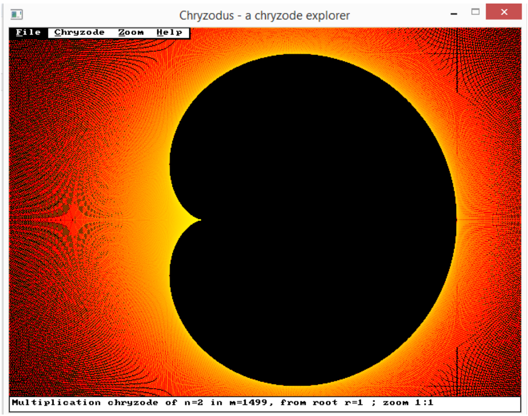

Figura 15: Chryzode (*cardioide*), produto por 2 no módulo 1499.
Fonte: Os autores

A seguir, exibiremos alguns exemplos de Chryzodes correspondentes à multiplicação por a = 3. Da mesma forma que na multipliplicação por 2, não exibiremos a circunferência e iremos variar o valor de m. Assim, teremos os Chryzodes para módulo 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 30, 40, 50 e 70, conforme Figuras apresentadas a seguir: Figuras de 17 a 27.

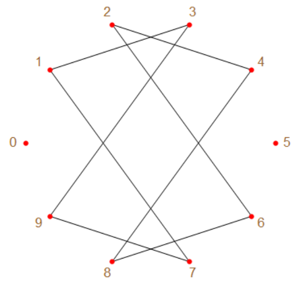

Figura 16: Chryzode, produto por 3 no módulo 10. Fonte: Os autores

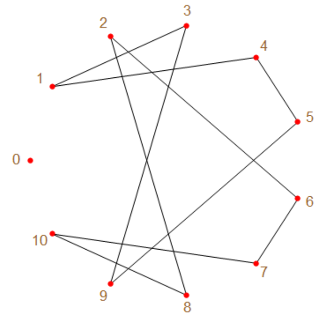

Figura 17: Chryzode, produto por 3 no módulo 11. Fonte: Os autores

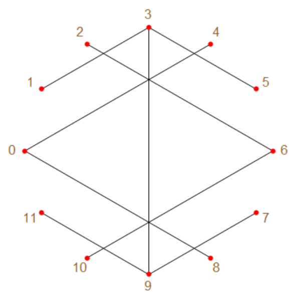

Figura 18: Chryzode, produto por 3 no módulo 12. Fonte: Os autores

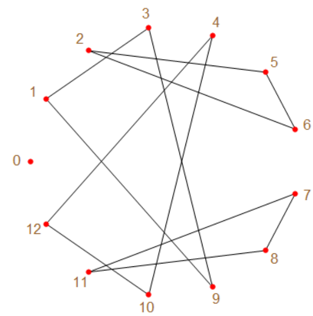

Figura 19: Chryzode, produto por 3 no módulo 13. Fonte: Os autores

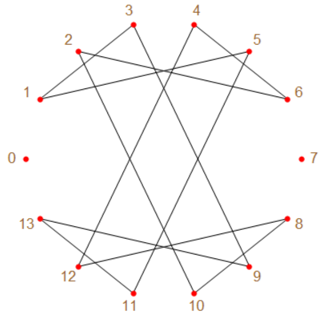

Figura 20: Chryzode, produto por 3 no módulo 14.
Fonte: Os autores

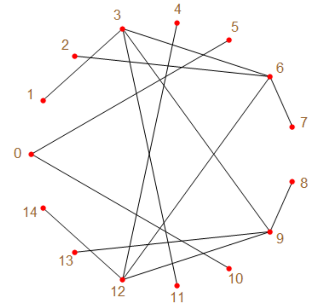

Figura 21: Chryzode, produto por 3 no módulo 15.
Fonte: Os autores

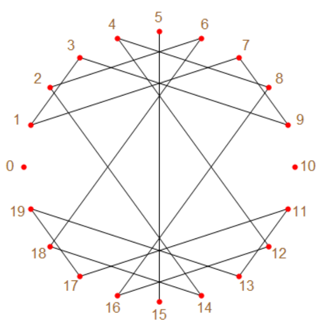

Figura 22: Chryzode, produto por 3 no módulo 20.
Fonte: Os autores

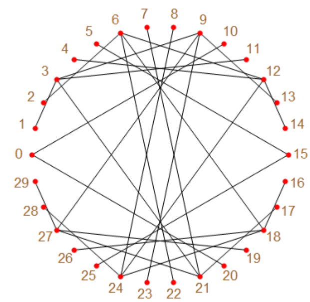

Figura 23: Chryzode, produto por 3 no módulo 30.
Fonte: Os autores

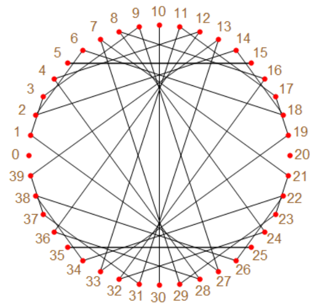

Figura 24: Chryzode, produto por 3 no módulo 40.
Fonte: Os autores

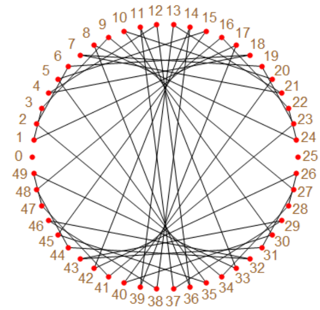

Figura 25: Chryzode, produto por 3 no módulo 50.
Fonte: Os autores

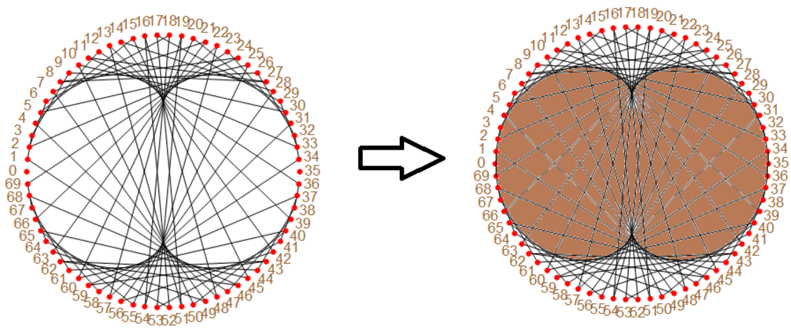

Figura 26: Chryzode, produto por 3 no módulo 70.
Fonte: Os autores

Assim observamos que, variando o valor de m, obtemos uma curva envolvente parecida com um rim, o qual podemos visualizar na pintura da Figura 26. Em razão disso, essa curva recebe o nome de *nefroide*, que também surge em outros contextos como o bulbo principal do conjunto de Mandelbrot do tipo $z^3 + c$, conforme podemos visualizar na Figura 27.

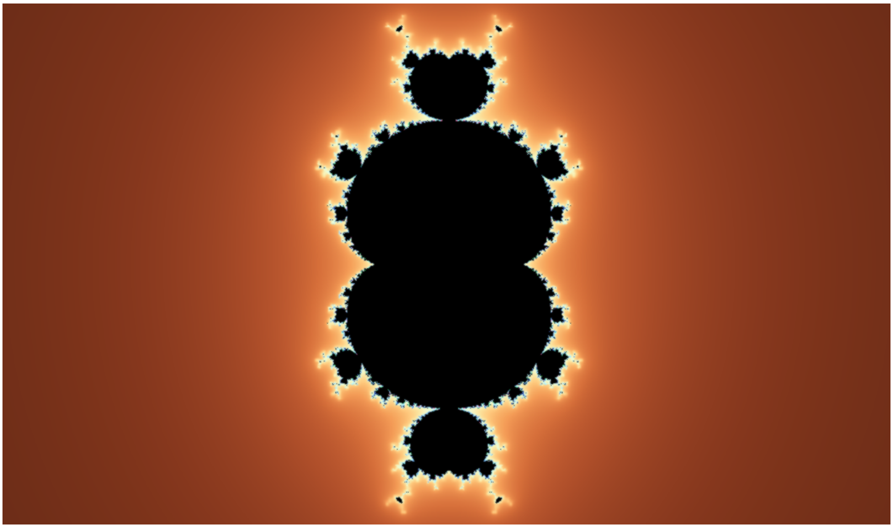

Figura 27: Conjunto de Mandelbrot do tipo $z^3 + c$.
Fonte: Os autores

No *software* Chryzodus, também é possível construir o *nefroide*, conforme podemos ver na Figura 28.

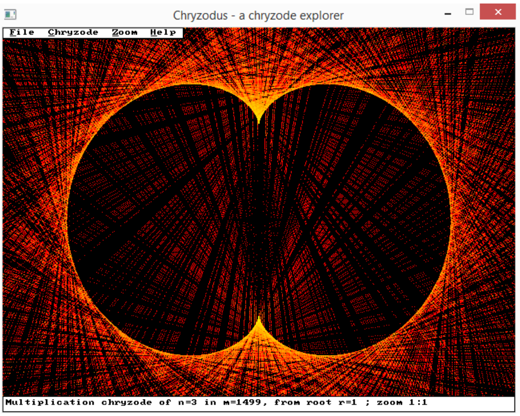

Figura 28: Chryzode (*nefroide*), produto por 3 no módulo 1499.
Fonte: Os autores

Considerando a multiplicação por a = 2, observamos que a curva envolvente fornecida pelo processo de construção de Chryzode tem a forma de uma "pétala", e para a multiplicação por a = 3, duas "pétalas". Também, notamos que para o caso a = 4 tem três "pétalas", e para o caso a = 5 tem quatro "pétalas", como mostram as Figuras 29 e 30.

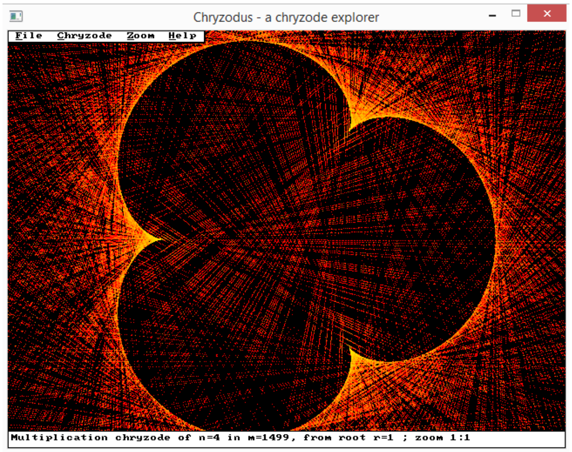

Figura 29: Chryzode, produto por 4 no módulo 1499.

Fonte: Os autores

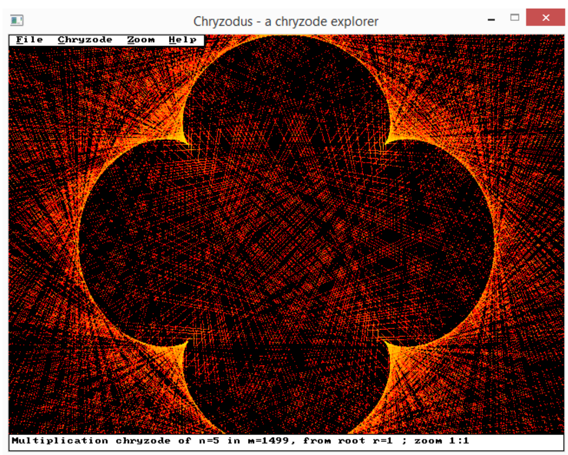

Figura 30: Chryzode, produto por 5 no módulo 1499.

Fonte: Os autores

Para visualizarmos o que acontece de uma forma dinâmica, amparada por recursos tecnológicos, foi criado o vídeo que varia o valor de a e o valor de m dos Chryzodes, o que está disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=sSq3DCkpS-g&t=12s.

Para $n = 2, 3, 4, 5, 6$, observamos o mesmo fenômeno para o conjunto de Mandelbrot $z_k = z_{k-1}^n + c$, ou seja, para cada n $(2 \leq n \leq 6)$ obtemos $n - 1$ "pétalas". O que pode ser visualizado no *software* FRAQTIVE, disponível em:

https://fraqtive.mimec.org/.

Para um maior entendimento do *software* e da criação dos Conjuntos de Mandelbrot, foi desenvolvido um breve vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=t31ulWRs4mY.

3. Proposta de atividade

Nesta seção, propomos uma atividade de Chryzodes que pode ser desenvolvida por alunos do Ensino Fundamental, a partir do 8° ano, e do curso de Licenciatura em Matemática.

Os objetivos desta proposta de atividade são levar os estudantes a calcular o perímetro de uma circunferência, dividir uma circunferência em m partes iguais, reconhecer arco de circunferência e calcular seu comprimento, promover a aprendizagem da aritmética modular de forma lúdica com o uso de operações simples para determinar diferentes congruências modulares. Além disso, a atividade permite que os estudantes façam uso de instrumentos básicos de desenho-régua e compasso e, acreditamos, potencializa a concentração e estimula a criatividade.

Para desenvolver a atividade serão necessários cartolina, papel ou mdf, régua, compasso, lápis, caneta, lápis de cor, gis de cera, canetinhas coloridas, pregos e barbante.

Antes da aplicação da atividade sugerimos uma aula de introdução à teoria básica de congruências. A seguir descrevemos os passos a serem seguidos para o desenvolvimento da atividade:

- distribuir para os alunos ou grupos o Chryzode a ser desenhado, ou seja, multiplicação por a no módulo m;
- com o compasso desenhar uma circunferência em um papel ou cartolina do tamanho que desejar;
- calcular o comprimento da circunferência pela fórmula $C = d\pi$, onde C é o comprimento da circunferência e d é o diâmetro da circunferência;
- dividir o comprimento da circunferência em m partes iguais;
- medir o barbante com o resultado acima e cortá-lo;
- estipular o ponto 0 na circunferência e com o barbante cortado determinar os $(m-1)$ pontos;
- determinar as congruências $a \cdot i \equiv b_i \pmod{m}$, para $i = 1, 2, \cdots, m-1$;
- ligar os pontos 1 com b_1, 2 com b_2, 3 com b_3, $\cdots$, $m-1$ com b_{m-1}, formando assim o Chryzode;
- depois de construído o Chryzode, preenche-lo da maneira que a criatividade sugerir.

Como material que pode ser apresentado em sala de aula, construímos em uma tábua de mdf cortada em forma circular o Chryzode do Exemplo 3, onde a é igual a 2 e m é igual a 11.

Assim, medimos o diâmetro da tábua, que deu $48,6$ cm; calculando o comprimento da circunferência encontramos $152,68$ cm (aproximadamente); dividindo esse valor por 11, encontramos que cada comprimento de arco é igual a $13,88$ cm (aproximadamente). Após isso, cortamos um barbante com essa medida e fizemos as marcações na tábua. Em seguida, pregamos um prego em cima de cada marcação.

Logo, conforme os cálculos do Exemplo 3, amarramos um barbante de 1 à 2, de 2 à 4, de 3 à 6, de 4 à 8, de 5 à 10, de 6 à 1, de 7 à 3, de 8 à 5, de 9 à 7 e de 10 à 9.

O passo a passo e o resultado final pode ser conferido nas Figuras 31 a 40.

Figura 31: Linha de 1 à 2.
Fonte: Os autores

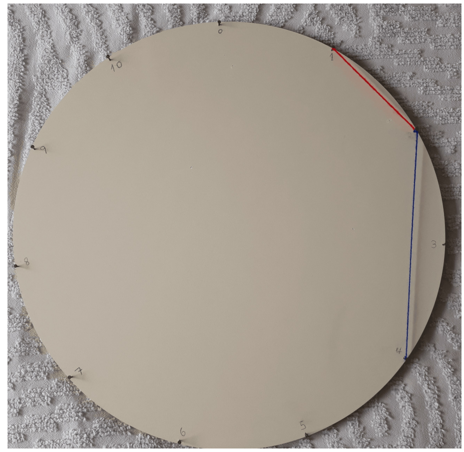

Figura 32: Linha de 2 à 4.
Fonte: Os autores

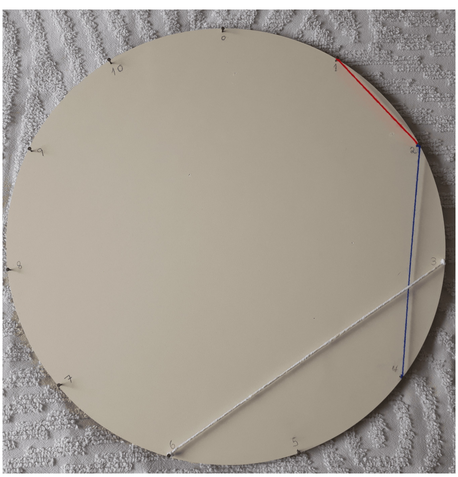

Figura 33: Linha de 3 à 6.
Fonte: Os autores

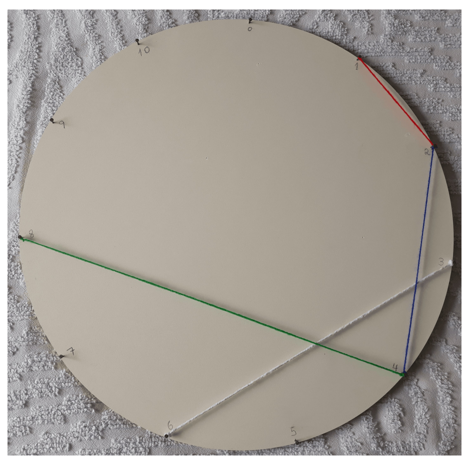

Figura 34: Linha de 4 à 8.
Fonte: Os autores

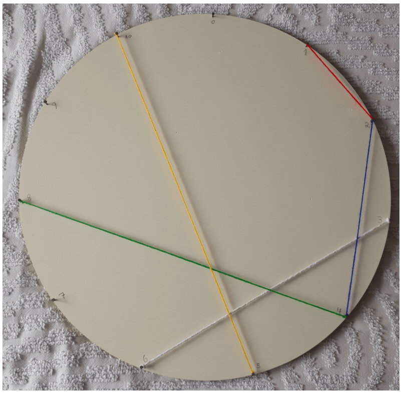

Figura 35: Linha de 5 à 10.
Fonte: Os autores

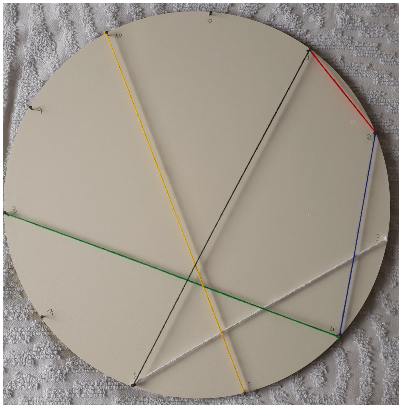

Figura 36: Linha de 6 à 1.
Fonte: Os autores

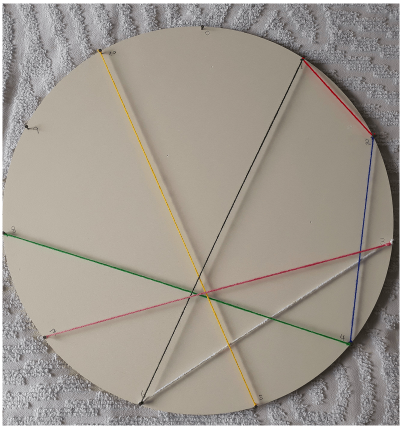

Figura 37: Linha de 7 à 3.
Fonte: Os autores

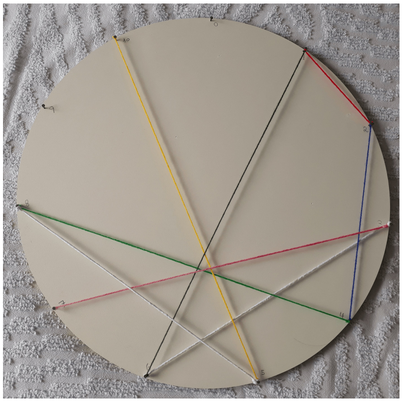

Figura 38: Linha de 8 à 5.
Fonte: Os autores

Figura 39: Linha de 9 à 7.
Fonte: Os autores

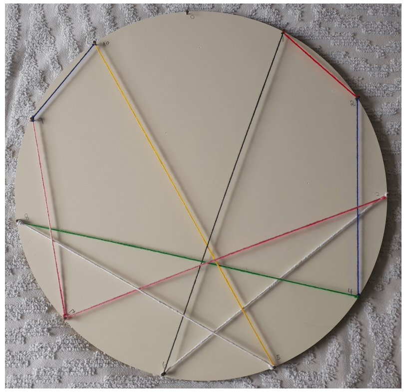

Figura 40: Linha de 10 à 9.
Fonte: Os autores

4. Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma das aplicações da Aritmética Modular cuja finalidade é o despertar da curiosidade dos alunos, no processo de ensino/aprendizado da Matemática, com atividades interessantes.

Acreditamos que a Aritmética Modular poderia ser enfatizada na educação básica, pois permite exercitar o raciocínio lógico-dedutivo, com diferentes graus de dificuldade, e, desse modo, abrindo espaço a cada atividade proposta, a introdução de outras atividades com um grau mais elevado de dificuldade. Dessa forma o aluno é instigado a pensar estratégias para tentar resolver estas atividades, as quais podem desenvolver potencialidades que acarretam uma melhora no seu desempenho dentro e fora de sala de aula.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (Capes) -Código de Financiamento 001.

Referências

[1] Bello, M. G. *La Aritmética Modular y algunas de sus aplicaciones*. Dissertação (Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales) — Universidad Nacional de Colombia, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8328/moreiagomezbello.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 01 de agosto de 2022.

[2] BRASIL, S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais - Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 01 de agosto de 2022.

[3] Hefez, A. *Aritmética*. Coleção Profmat. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2016.

[4] Konageski, D. M. F. *Experiências concretas na aritmética modular*. Dissertação de Mestrado, Profmat- UTFPR, Curitiba-PR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019.

[5] Koshy, T. *Elementary number theory with applications*. Elsevier. Boston, Mass., 2007.

[6] Reis, M. V. dos. *Conjunto de Mandelbrot*. Dissertação (Profmat) — Universidade Federal de Goiás, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3974&id2=95006>. Acesso em: 01 de agosto de 2022.

[7] Tavares, J. *Envolventes*. Rev. Ciência Elem., V10(1):007, 2022.

Dionatan Miguel Fiorin Konageski
SED/SC
<dionatanmiguel@hotmail.com>

Mari Sano
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<marisano@utfpr.edu.br>

Recebido: 21/10/2022
Publicado: 07/07/2023