

A geometria analítica do máximo da razão entre duas formas quadráticas

Lucas Monteiro Chaves 

Maria do Carmo P. de Toledo Costa 
Reis 

Carlos José dos

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma visão intuitiva para o cálculo do máximo do quociente entre duas formas quadráticas, baseada em conceitos geométricos e geometria analítica.

Palavras-chave: Formas quadráticas; Elipsoides; Multiplicador de Lagrange.

Abstract

In this work we present an intuitive view to calculate the maximum of the quotient between two quadratic forms, based on geometric concepts and analytical geometry.

Keywords: Quadratic forms; Ellipsoids; Lagrangian multiplier.

1. Introdução

Funções polinomiais em uma variável são funções simples, muito estudadas, e podem ser generalizadas para funções polinomiais em várias variáveis. Um caso particular dessas funções polinomiais em várias variáveis, que possuem propriedades interessantes, são as formas quadráticas, que podem ser definidas utilizando um pouco da teoria de matrizes, como segue.

Se $B_{n \times n}$ é uma matriz simétrica e $\mathbf{x}_{n \times 1}$ um vetor n -dimensional, então as formas quadráticas são dadas pelas funções, em n variáveis, definidas por $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{x}$. Se a matriz B é positiva definida, então $g(\mathbf{x}) \geq 0$ e $g(\mathbf{x}) = 0$ se, e somente se, o vetor \mathbf{x} é o vetor nulo [1].

Para o caso em que B é positiva definida, as curvas de nível das formas quadráticas, o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x}^t B \mathbf{x} = \text{constante}\}$, definem os chamados elipsoides, que são generalizações das elipses em \mathbb{R}^2 , como se vê no caso simples dado pela equação

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{constante.} \quad (\text{Figura 1})$$

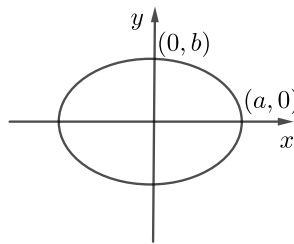


Figura 1: Elipse centrada na origem

2. Quociente de formas quadráticas

Um problema de grande interesse em aplicações, por exemplo, em Estatística e Otimização, é o de se obter o máximo do quociente entre duas formas quadráticas [2, 3].

Formalmente, dada

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 \mathbf{x} &\mapsto \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x}},
 \end{aligned} \tag{1}$$

com $\mathbf{B}_{n \times n}$ positiva definida, quer se calcular

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x}}.$$

Esse problema é bem conhecido e admite uma solução explícita que utiliza apenas conceitos de Álgebra Linear e a Teoria dos Multiplicadores de Lagrange [2, 3]. Essa demonstração será apresentada na seção 2.3. Formalmente, o cálculo do máximo pode se apresentar da forma: se $\mathbf{Q}_{n \times n}$ é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz \mathbf{B} , isto é, $\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{D}_B$, em que \mathbf{D}_B é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de \mathbf{B} , então:

Teorema 1. *O máximo da função f é igual ao maior autovalor da matriz $\mathbf{D}_B^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^t \mathbf{D}_B^{-\frac{1}{2}}$, sendo $\mathbf{D}_B^{-\frac{1}{2}}$ matriz diagonal cujos elementos são o inverso da raiz quadrada dos autovalores de \mathbf{B} [3].*

Apesar dos conceitos de Álgebra Linear serem essencialmente geométricos, o Teorema 1, como enunciado, não apresenta ao leitor qualquer possibilidade de uma compreensão intuitiva. O objetivo deste artigo é encontrar a solução desse problema a partir de sua geometria, e com isso, espera-se que essa abordagem torne a solução mais intuitiva. Uma ferramenta matemática muito transparente para se explicitar a geometria de um problema é a Geometria Analítica, e essa será amplamente utilizada.

A primeira estratégia para atacar o problema é utilizar a ferramenta básica para se calcular máximos e mínimos de funções: derivar e igualar a zero. Mas as derivadas parciais de quociente de polinômios levará-nos a um sistema polinomial e, portanto, de difícil solução ou até

mesmo impossível. Portanto, tal caminho não parece muito encorajador. E se utilizarmos a teoria dos máximos e mínimos condicionados? Embora o problema seja um problema de maximização sem nenhuma restrição, é possível transformá-lo em um problema de maximização com restrição, e a restrição será o elemento geométrico que precisamos. Para isso, deve-se observar o fato fundamental de que o valor de $f(\mathbf{x})$ depende apenas da reta definida por \mathbf{x} , isto é, $f(\mathbf{x}) = f(\alpha\mathbf{x})$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. De fato,

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \frac{(\alpha\mathbf{x}^t)A(\alpha\mathbf{x})}{(\alpha\mathbf{x}^t)B(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\alpha^2\mathbf{x}^tA\mathbf{x}}{\alpha^2\mathbf{x}^tB\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}).$$

Podemos então restringir f a um conjunto que contenha um elemento de cada semirreta que passa pela origem. Um candidato natural é uma curva de nível da forma quadrática definida por B , o elipsoide centrado na origem,

$$J = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^tB\mathbf{x} = 1\},$$

como ilustra a Figura 2.

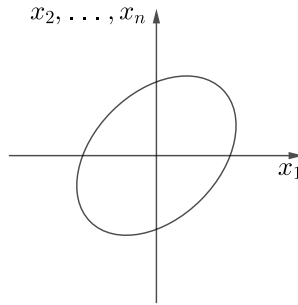


Figura 2: Elipsoide J centrado na origem

Restrito ao conjunto J , a função f fica da forma

$$f : J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^tA\mathbf{x}.$$

Estudar um caso particular vai ajudar a se ter uma ideia geométrica do problema. Dado um vetor $\mathbf{b}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$, seja a matriz $A_{n \times n}$ dada por $A = (\mathbf{b}_{n \times 1})(\mathbf{b}_{n \times 1})^t$. Note que a matriz A , neste caso, é positiva semidefinida e tem posto 1. Logo,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{x}^t(\mathbf{b}\mathbf{b}^t)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^t\mathbf{b})(\mathbf{x}^t\mathbf{b})^t = (\mathbf{x}^t\mathbf{b})^2 = (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta)^2,$$

sendo θ o ângulo entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{b} .

Portanto, o máximo de f , restrito a J , é o vetor $\tilde{\mathbf{x}}_{n \times 1}$ em J que nos dá a maior projeção sobre o vetor $\mathbf{b}_{n \times 1}$.

Neste caso particular, o problema fica totalmente descrito em termos geométricos; devemos encontrar o vetor $\tilde{\mathbf{x}} \in J$ em que um hiperplano perpendicular ao vetor \mathbf{b} tangencia o elipsoide J , como ilustra a Figura 3. Observe que $-\tilde{\mathbf{x}}$ também é uma solução.

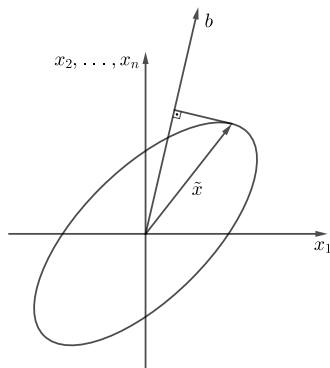


Figura 3: Geometria do ponto do máximo

2.1. O caso $n=2$

Para calcular explicitamente o vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ vamos simplificar ainda mais o problema, considerando o caso $n = 2$ e o vetor $\mathbf{b}_{2 \times 1}$ sobre o eixo y , isto é, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$. Seja $(x(t), y(t))$ uma curva sobre a elipse J e, portanto,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a(x(t))^2 + 2bx(t)y(t) + c(y(t))^2. \quad (2)$$

Derivando a equação (2) e igualando a zero, obtemos

$$2ax(t)x'(t) + 2b(x'(t)y(t) + x(t)y'(t)) + 2cy(t)y'(t) = 0. \quad (3)$$

No ponto $\tilde{\mathbf{x}} = (x(0), y(0))^t$ o vetor tangente à curva é horizontal, pois é perpendicular ao vetor \mathbf{b} , isto é, $y'(0) = 0$, como ilustra a Figura 4.

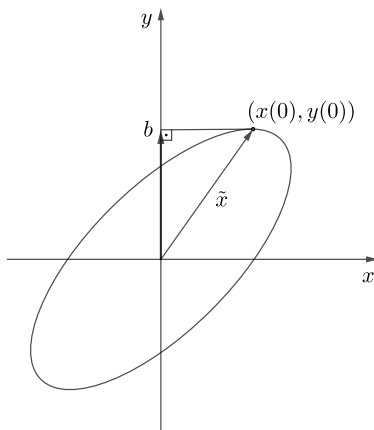


Figura 4: Vetor tangente

Portanto, pela equação (3),

$$(2ax(0) + 2by(0))x'(0) = 0,$$

ou seja,

$$2ax(0) + 2by(0) = 0$$

o que implica

$$x(0) = -\frac{b}{a}y(0).$$

Assim, tem-se o sistema

$$\begin{cases} x(0) = -\frac{b}{a}y(0) \\ a(x(0))^2 + 2bx(0)y(0) + c(y(0))^2 = 1. \end{cases}$$

Substituindo $x(0)$ obtém-se uma equação do segundo grau para $y(0)$, e o problema, para este caso particular, está totalmente resolvido.

2.2. O caso geral

O que se pode fazer em relação ao caso geral? Tem-se, pelo Teorema Espectral [4, 5], que se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A relativos aos autovetores unitários e_1, e_2, \dots, e_n , então

$$A = \lambda_1 e_1 e_1^t + \lambda_2 e_2 e_2^t + \dots + \lambda_n e_n e_n^t.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \lambda_1 \mathbf{x}^t (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^t) \mathbf{x} + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}^t (\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^t) \mathbf{x} \\
 &= \lambda_1 (\mathbf{x}^t \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^t \mathbf{x}) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x}^t \mathbf{e}_n) (\mathbf{e}_n^t \mathbf{x}) \\
 &= \lambda_1 (\mathbf{x}^t \mathbf{e}_1)^2 + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x}^t \mathbf{e}_n)^2 \\
 &= \lambda_1 (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{e}_1\| \cos \theta_1)^2 + \cdots + \lambda_n (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{e}_n\| \cos \theta_n)^2 \\
 &= \|\mathbf{x}\|^2 (\lambda_1 \cos^2 \theta_1 + \cdots + \lambda_n \cos^2 \theta_n) \\
 &\leq \|\mathbf{x}\|^2 (\cos^2 \theta_1 + \cdots + \cos^2 \theta_n) \max_i \lambda_i.
 \end{aligned} \tag{4}$$

As coordenadas $(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)$ são as coordenadas de um ponto na esfera unitária S^{n-1} , pois $\cos^2 \theta_1 + \cdots + \cos^2 \theta_n = 1$. Para se convencer dessa igualdade, vejamos o caso particular em \mathbb{R}^3 : considere o cubo de vértices

$$(0, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A diagonal desse cubo, definida pelo ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, tem comprimento um e a projeção nos eixos coordenados dá-se pelos ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e, portanto, $\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$.

Retornando à desigualdade em (4) e supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 = \max_i \lambda_i$, tem-se $f(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 \lambda_1$.

Vamos novamente simplificar o problema e pensar no caso mais simples, em que o elipsoide J é uma esfera de raio 1, isto é, a matriz B é a matriz identidade. Logo, $f(\mathbf{x}) \leq \lambda_1$, mas como $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^t \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = \lambda_1$, fica então provado que o máximo de $f(\mathbf{x})$ é o maior autovalor de A , como de fato se tem pela demonstração do Teorema 1 apresentada na seção 2.3.

Voltemos à situação geral, mas ainda com a seguinte restrição: os eixos principais dos elipsoides definidos por A e B são coincidentes e definidos pelos vetores unitários $\{u_1, \dots, u_n\}$. Em termos de Álgebra Linear, tal propriedade traduz-se no fato das matrizes A e B comutarem, isto é, $AB = BA$, o que implica que são simultaneamente diagonalizáveis [1]. Tem-se também que A comuta com B^{-1} e que os autovalores de AB^{-1} são dados pelo quociente entre os autovalores dessas matrizes.

Vamos obter o vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ em que ocorre o máximo de f . Sendo mais cuidadosos em relação à notação, pois utilizamos a letra f para designar três funções diferentes. Seremos mais específicos:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x}},$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ restrita a } \mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1 \text{ e}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ sem restrição em } \mathbf{x}.$$

As curvas de nível de f_1 são retas que passam pela origem, as curvas de nível de f_2 são dois pontos definidos pela interseção entre uma reta que passa pela origem e o elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$ e as curvas de nível de f_3 são elipsoides. Observe que esses elipsoides, que são curvas de nível de f_3 , $f_3(\mathbf{x}) = k$, para valores de k suficientemente grandes, contêm em seu interior o elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$. Como

$f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} no elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$, o máximo de f_2 ocorre na curva de nível de f_3 de menor valor de k , para o qual esses elipsoides, que contêm o elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$, tangenciam-se pela primeira vez. A ocorrência da tangência, geometricamente intuitiva, pode ser provada de maneira rigorosa pela diferenciabilidade dos elipsoides. Veja a Figura 5.

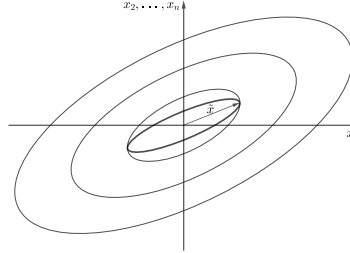


Figura 5: Elipsoides com eixos principais coincidentes

Sejam $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ os autovalores da matriz \mathbf{B} . Da Geometria Analítica dos elipsoides tem-se que $\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$ é igual ao inverso de um dos autovalores da matriz \mathbf{B} , $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, digamos o autovalor relativo ao índice j , logo, $\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{\alpha_j}$ [1].

Como $\tilde{\mathbf{x}}$ está sobre o eixo definido por \mathbf{u}_j , então $\tilde{\mathbf{x}}$ também é múltiplo do autovetor \mathbf{u}_j de \mathbf{A} . Logo,

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} = \lambda_j \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{\lambda_j}{\alpha_j}.$$

Portanto, o máximo de $f(\tilde{\mathbf{x}})$ é o maior autovalor de $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$, como também se obtém pela demonstração do Teorema 1.

Finalmente, vejamos o caso geral em que os elipsoides definidos pelas curvas de nível de f_3 e o elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$ estão em posições quaisquer. Vale o argumento anterior, em que o ponto de máximo $\tilde{\mathbf{x}}$ ocorre no primeiro ponto em que as curvas de nível de f_3 , que contêm o elipsoide $\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} = 1$, o tangenciam pela primeira vez (Figura 6).

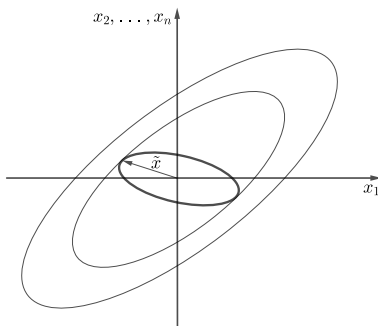


Figura 6: Elipsoides com eixos principais não coincidentes

Considere uma curva qualquer $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))^t$ sobre o elipsoide J tal que $\mathbf{z}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. Como $\mathbf{z}(t)$ está sobre o elipsoide J tem-se que $\mathbf{z}^t(t)B\mathbf{z}(t) = 1$. Derivando $\frac{d}{dt}[\mathbf{z}^t(t)B\mathbf{z}(t)]_{t=0} = 0$ e, portanto, $\frac{d}{dt}\mathbf{z}^t(t) \Big|_{t=0} B\mathbf{z}(0) + \mathbf{z}^t(0)B\frac{d}{dt}\mathbf{z}(t) \Big|_{t=0} = 0$ logo,

$$\mathbf{v}^t B \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^t B \mathbf{v} = 0,$$

ou seja,

$$\mathbf{v}^t B \tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{v}^t B \tilde{\mathbf{x}}) = 0$$

e assim,

$$2\mathbf{v}^t B \tilde{\mathbf{x}} = 0,$$

para todo vetor \mathbf{v} no espaço tangente de J em $\tilde{\mathbf{x}}$.

Considerando uma outra curva $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))^t$, com $\mathbf{w}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$, mas agora no elipsoide definido por A , obtém-se também que $\mathbf{v}^t A \tilde{\mathbf{x}} = 0$ para todo vetor \mathbf{v} no espaço tangente do elipsoide definido por A . Como os elipsoides são tangentes entre si em $\tilde{\mathbf{x}}$, os dois vetores $B\tilde{\mathbf{x}}$ e $A\tilde{\mathbf{x}}$ são perpendiculares a um mesmo hiperplano em \mathbb{R}^n e, portanto, são vetores colineares, isto é, existe um número β tal que $A\tilde{\mathbf{x}} = \beta B\tilde{\mathbf{x}}$, como ilustra a Figura 7.

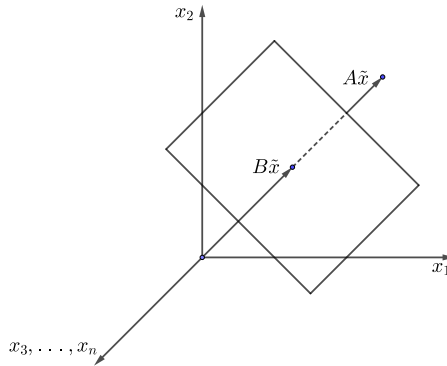


Figura 7: Vetor normal ao hiperplano tangente

Como $A\tilde{\mathbf{x}} = \beta B\tilde{\mathbf{x}}$ tem-se que $B^{-1}A\tilde{\mathbf{x}} = \beta\tilde{\mathbf{x}}$ e, portanto, $\tilde{\mathbf{x}}$ é um autovetor de $B^{-1}A$ relativo ao autovalor β . Tem-se também que

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^t A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^t (\beta B\tilde{\mathbf{x}}) = \beta \tilde{\mathbf{x}}^t B\tilde{\mathbf{x}} = \beta.$$

Agora, como $A\tilde{\mathbf{x}} = \beta B\tilde{\mathbf{x}}$, ou seja, $B^{-1}A\tilde{\mathbf{x}} = \beta\tilde{\mathbf{x}}$ temos que $\tilde{\mathbf{x}}$ é um autovetor de $B^{-1}A$ relativo ao autovalor β , que é justamente o valor da função $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ no ponto $\tilde{\mathbf{x}}$.

Com o raciocínio de que os elipsoides definidos pelas curvas de nível de $f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = k$, que contêm o elipsoide $\mathbf{x}^t B\mathbf{x} = 1$, vão se tornando menores à medida que k diminui e, novamente, utilizando o argumento de diferenciabilidade, ocorre o primeiro ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ de tangência. Temos aqui uma questão em que a tangência poderia ocorrer em todos os pontos de um subelipsoide do elipsoide $\mathbf{x}^t B\mathbf{x} = 1$, mas tal situação, que demanda uma análise matemática mais sofisticada, é contornada supondo que os dois elipsoides estão em uma posição genérica e apenas em posições particulares ocorreria infinitos pontos de tangência. Então $\tilde{\mathbf{x}}^t A\tilde{\mathbf{x}}$ é o maior valor possível para k , pois para valores maiores os elipsoides definidos por f_3 contêm, estritamente, o elipsoide $\mathbf{x}^t B\mathbf{x} = 1$ e, portanto, $k = \beta$ é o maior autovalor da matriz $B^{-1}A$, e temos assim a solução final do problema.

A construção acima utiliza essencialmente os argumentos geométricos da demonstração do método dos Multiplicadores de Lagrange.

2.3. Prova do Teorema 1 utilizando Multiplicadores de Lagrange

Voltemos ao problema geral que é o de maximizar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ restrito ao elipsoide $J = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^t B\mathbf{x} = 1\}$. Vamos utilizar a teoria usual dos Multiplicadores de Lagrange. A função lagrangeana é

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^t B\mathbf{x} - 1),$$

logo

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) = 2\mathbf{x}^t A - 2\lambda \mathbf{x}^t B$$

e fazendo $\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$, segue que $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$ e, portanto, $B^{-1}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Logo, os vetores críticos de f restritos a $\mathbf{x}^t B \mathbf{x} = 1$ são dados pelos autovetores de $B^{-1}A$. Para um autovetor \mathbf{x} tem-se

$$B^{-1}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^t B \mathbf{x} = \lambda$$

e, portanto, o máximo de f , restrito a $\mathbf{x}^t B \mathbf{x}$, ocorre para o autovetor de $B^{-1}A$ relativo ao maior autovalor λ .

Para concluir a demonstração do Teorema 1, observando que os autovalores da matriz MN são iguais aos autovalores da matriz NM , quaisquer que sejam as matrizes M e N [5], os autovalores de $D_B^{-\frac{1}{2}} Q^t A Q D_B^{-\frac{1}{2}}$ são iguais aos autovalores da matriz $Q D_B^{-\frac{1}{2}} D_B^{-\frac{1}{2}} Q^t A = Q D_B^{-1} Q^t A = B^{-1}A$.

3. Conclusão

O método geométrico e intuitivo utilizado para resolver o problema de maximização não pode e não poderia querer substituir o método elegante e conciso dos Multiplicadores de Lagrange. A justificativa para este artigo baseia-se em dois pontos empiricamente observados pelos autores: primeiro, o estudante e o profissional ao aplicarem o método dos Multiplicadores de Lagrange, muitas vezes o fazem de forma puramente algébrica sem, de fato, ter uma plena consciência do que foi calculado; segundo, a geometria analítica é uma ferramenta expressiva do poder da Matemática e, apesar disso, pode estar sendo negligenciada no ensino acadêmico.

Espera-se que, das construções acima, o estudante e o profissional que necessitam desses resultados, tenha uma melhor visão intuitiva do que realmente foi calculado.

Referências

- [1] Boldrini, J.L., *et al.* *Álgebra linear*. São Paulo: Harbra, 1980.
- [2] Ferreira, D.F. *Estatística multivariada*. Lavras: Ufla, 2018.
- [3] Lehmann, E.L.; Casella, G. *Theory of point estimation*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [4] Lima, E.L. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Impa, 2003. (Coleção Matemática Universitária).
- [5] Santos, R.J. *Álgebra linear e aplicações*. Belo Horizonte: UFMG, 2010.

Lucas Monteiro Chaves
Universidade Federal de Lavras
<lucas@ufla.br>

Maria do Carmo P. de Toledo Costa
Universidade Federal de Lavras
<mctoledo@ufla.br>

Carlos José dos Reis
Universidade Federal de Alfenas
<carlosjreis17@yahoo.com.br>

Recebido: 14/07/2022
Publicado: 08/08/2023