PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.2, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1120

O problema de Langley: uma abordagem natural

Jamil Ferreira   Fábio Corrêa de Castro

Resumo

Neste trabalho apresentamos o desfecho de uma abordagem natural em busca da solução do Problema de Langley. Seguimos o caminho ingênuo, sem truques, do que seria uma abordagem real em sala de aula para um problema desconhecido. Isso conduz-nos a uma jornada de obstáculos geométricos e algébricos, e indagações tão ricas quanto as soluções apresentadas para o problema.

Palavras-chave: Problema de Langley; Triângulo Russo; Geometria Plana; Trigonometria

Abstract

In this paper we present the outcome of a natural approach in search of the solution of Langley's Problem. We followed the naive, untructed path of what would be a real classroom approach to an unknown problem. This leads us on a journey of geometric and algebraic obstacles, and inquiries as valuable as the solutions presented to the problem.

Keywords: Langley's Problem; Russian Triangle; Plane Geometry; Trigonometry

1. Introdução

O Problema de Langley é um famoso e difícil problema de geometria elementar, apresentado pelo Matemático inglês Edward Mann Langley (1851 - 1933) em 1922 ([1]). Esse problema é amplamente conhecido como "o problema do Triângulo Russo", embora não tenhamos encontrado na literatura fontes precisas sobre a razão desse nome.

O problema que leva tal nome é o seguinte: encontrar o valor do ângulo x na Figura 1, sabendo que o triângulo ABC é isósceles, sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\hat{A} = 20°$.

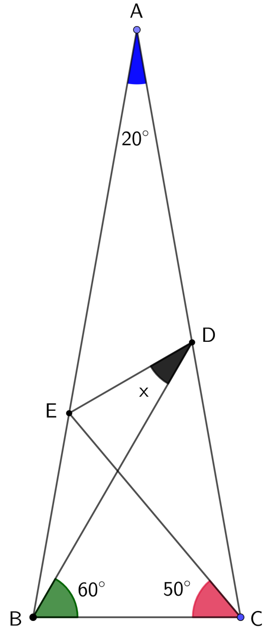

Figura 1: O Problema de Langley: sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$, qual o valor de x?

A solução mais usual para esse problema é amplamente divulgada em vídeos e sítios da internet, além de livros de geometria. Veja, por exemplo, as aulas de Geometria Plana do Programa de Iniciação Científica da Obmep. Tal solução depende de um artifício bastante sutil e difícil de ser percebido e será apresentada mais adiante.

Quando nos deparamos com esse problema, tentamos, como sempre, o caminho mais óbvio de resolução que, se não conduzisse à solução, forçaria outros artifícios. O curioso é que o caminho que tentamos pareceu ter dado certo. No entanto, ao compararmos com a solução usualmente oferecida, que, como dissemos, é bastante perspicaz, percebemos que ela não coincidia com a nossa. Como essa solução é clássica, concluímos que a nossa resolução, obviamente, estava equivocada em algum ponto. Aí, iniciamos a viagem de detectar nosso erro, um tanto sutil, estudar a resolução clássica e elaborar uma terceira solução, dessa vez correta, e que nos parece bem mais natural do que a clássica.

Essas soluções serão discutidas a partir da próxima seção. Sugerimos sempre que o leitor tente por si só resolver o problema antes de ler as resoluções apresentadas. Assim, você se familiariza com o problema, imerge nele e, caso não consiga resolvê-lo por completo, entenderá muito melhor as soluções apresentadas.

2. Nossa primeira tentativa

É imediato encontrarmos os valores dos ângulos assinalados na Figura 2 a seguir, usando simplesmente resultados bem básicos sobre ângulos em triângulos, como, por exemplo, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos que não são adjacentes ao dado externo. Assim, encontramos facilmente os dois ângulos de 70°, os dois de 110°, o de 20° e o de 30° (pois cada ângulo da base do triângulo isósceles ABC mede 80°), o de 40° e o de 50°. Denotemos as medidas dos demais ângulos desconhecidos por y, z e w, conforme a Figura 2.

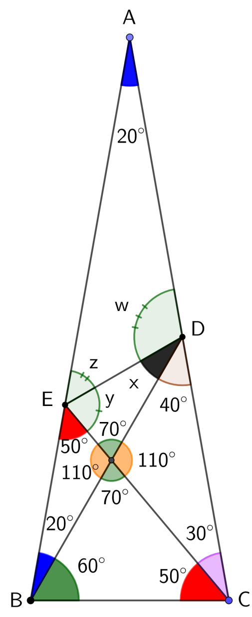

Figura 2: Ângulos facilmente obtidos a partir dos dados do problema.

Vemos facilmente que esses valores desconhecidos (que são positivos) devem satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$x + y = 110^\circ \tag{1}$$
$$x + w = 140^\circ \tag{2}$$
$$z + w = 160^\circ \tag{3}$$
$$y + z = 130^\circ \tag{4}$$

E isso parece ótimo, pois basta resolver um sistema com quatro equações lineares e quatro incógnitas! No entanto, esse sistema é indeterminado, já que a equação (1) pode ser eliminada, pois decorre das demais, da seguinte forma: $x + y = (x + w) + (y + z) - (z + w) = 140 + 130 - 160 = 110$. Agora, deixando w como variável livre, obtemos, das equações (2), (3) e (4),

$$x = 140° - w \tag{5}$$

$$z = 160° - w \tag{6}$$

$$y = -30° + w \tag{7}$$

em que w representa um valor qualquer entre 30° e 140° (pelas equações (5) e (7), para que x e y sejam positivos). Assim, alguns possíveis valores para x são $x = 45°$ (quando $w = 95°$) ou $x = 30°$ (quando $w = 110°$), dentre os infinitos outros do intervalo $0° < x < 110°$, que ocorre ao variar w dentro do intervalo que vai de 30° a 140°.

Intuitivamente, essas várias possibilidades de valores para x parecem estranhas, pois x parece estar univocamente determinado. Além disso, as soluções apresentadas usualmente conduzem apenas a $x = 30°$. Assim, descobrimos que a nossa "solução", aparentemente correta, deve conter alguma incoerência e com isso ficamos mais curiosos em descobri-la do que resolver o problema em si. Quem sabe, assim, poderíamos também descobrir o porquê do artifício que todas as soluções publicadas utilizam, e aí, sim, talvez o víssemos com mais naturalidade.

Para iniciar nossa análise, destaquemos o quadrilátero ADFE, conforme a Figura 3.

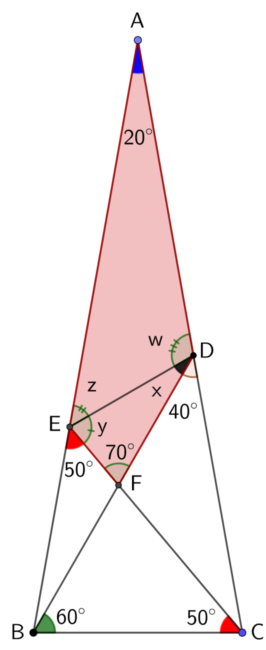

Figura 3: Destaque do quadrilátero ADFE.

Resolver o sistema a que chegamos consiste em resolver o seguinte problema relativo a esse quadrilátero:

Problema 1: *No quadrilátero* ADFE *da Figura 3, sabe-se que* $\mathrm{E\hat{F}D} = 70°$, $\mathrm{E\hat{A}D} = 20°$, $\mathrm{A\hat{E}F} = 130°$ *e* $\mathrm{A\hat{D}F} = 140°$. *Encontrar os valores x, w, z, y dos ângulos indicados.*

Notemos inicialmente que os dados fornecidos não determinam um único quadrilátero e nem sequer quadriláteros semelhantes, ou seja, quatro ângulos de um quadrilátero não determinam um quadrilátero, nem sequer sua forma (compare com o caso AAA de semelhança de triângulos). Para ver isso, basta, por exemplo, traçar o segmento $\mathrm{E'F'}$ paralelo a EF, conforme mostra a Figura 4.

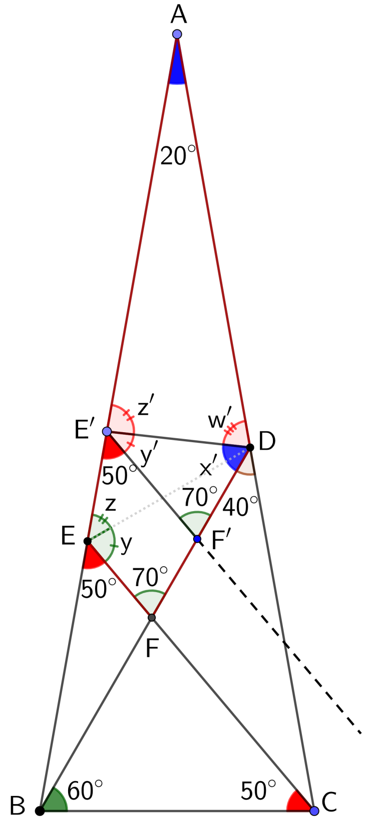

Figura 4: Os quadriláteros ADFE e $\mathrm{ADF'E'}$ possuem ângulos internos congruentes, mas não são semelhantes.

Observe que o novo quadrilátero $\mathrm{AE'F'D}$ tem seus ângulos correspondentes congruentes aos do quadrilátero AEFD, embora esses dois quadriláteros obviamente não sejam semelhantes (por quê?). Além disso, apesar de o ângulo $\mathrm{A\hat{E}'F'}$ continuar medindo 130° e $\mathrm{E'\hat{F}'D}$ continuar medindo 70°, a nova diagonal $\mathrm{DE'}$ produzirá valores de ângulos x′, w′, y′ e z′ diferentes dos correspondentes x, w, y e z da situação anterior. Isso quer dizer que o problema admite várias soluções. Assim, esse novo problema distanciou-se do problema original, retirando-lhe a "rigidez" geométrica. E foi esse o problema que resolvemos, não o original. De fato, se tentarmos recuperar o triângulo ABC original a partir do quadrilátero $\mathrm{AE'F'D}$, perceberemos que o triângulo não será mais isósceles, conforme ilustra a Figura 5.

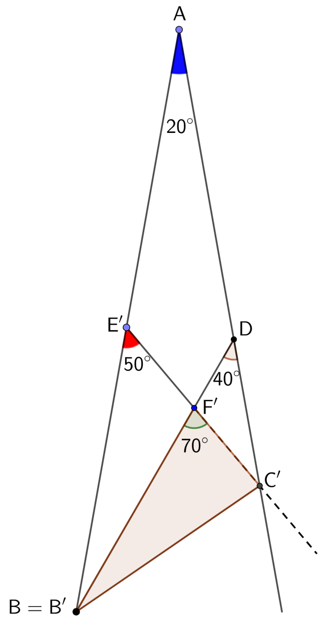

Figura 5: Recuperando o triângulo ABC′ a partir do quadrilátero ADF′E′.

O que ocorreu é que nossa solução acabou por deixar esvair-se a condição inicial de que o triângulo ABC é isósceles, sem que percebêssemos. Só percebemos por meio da intuição, dizendo-nos que o problema deveria ter apenas uma solução e também por sabermos dos textos a resolução clássica que nos dá x = 30°. Ou seja, o triângulo isósceles ABC dado conduz a um quadrilátero ADFE, tal que $E\hat{F}D = 70°$, $E\hat{A}D = 20°$, $A\hat{E}F = 130°$ e $A\hat{D}F = 140°$. Porém, um quadrilátero nessas condições pode não "morar" num triângulo isósceles.

Veja na Figura 6, a seguir, alguns exemplos explícitos de soluções do problema do quadrilátero que apresentam x = 17°, x = 30° e x = 52°. Nessa figura, EC, E′C′ e E′′C′′ são segmentos paralelos (Observe ainda que obteríamos, similarmente, soluções variadas traçando-se paralelas D′F′ ao lado DF, em vez das paralelas ao lado EC).

Observemos ainda que o ângulo de 20° em B e o de 30° em C, C′ ou C′′ não dependem de o triângulo ABC (ou ABC′ ou ABC′′) ser ou não isósceles.

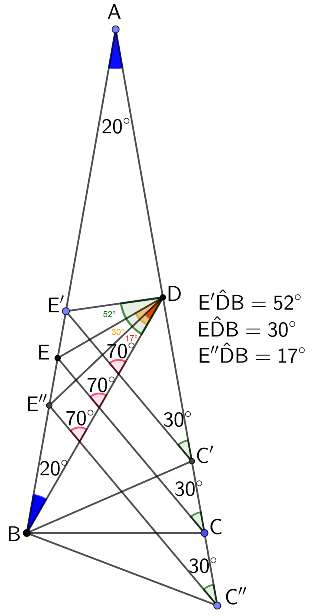

Figura 6: Algumas soluções do Problema 1.

Essas considerações fornecem-nos um outro enunciado para o problema que a nossa solução resolve:

Problema 2: *No triângulo* ABC *da figura 7 seguinte, encontre a medida* x *do ângulo* $E\hat{D}B$, *sabendo que* $\hat{A} = 20°$, $A\hat{B}D = 20°$, $A\hat{C}E = 30°$ *e* $E\hat{F}D = 70°$.

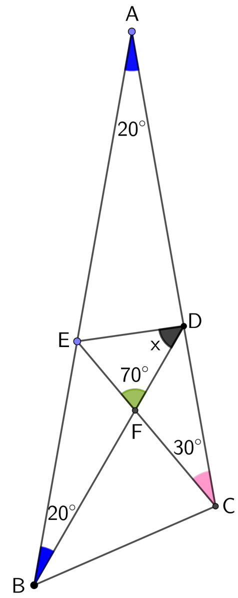

Figura 7: Ilustração do Problema 2.

3. Solução usual, nada natural.

A solução usual (assista em [2]) começa por construir um segmento de reta BP, com P em CD, tal que $C\hat{B}P = 20°$, conforme Figura 8. Essa sutil construção é a primeira ligação do quadrilátero ADFE com a hipótese de que o triângulo ABC seja isósceles; isto é, essa construção contribuirá para não perdermos a hipótese de que o triângulo ABC seja isósceles, quando chegarmos ao quadrilátero ADFE, conforme explicitaremos a seguir.

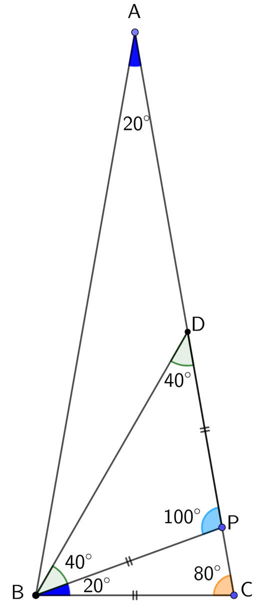

Figura 8: Criação do segmento $\overline{\mathrm{BP}}$ tal que $\mathrm{C\hat{B}P} = 20°$: a varinha mágica da solução clássica.

Primeiramente, observamos que o triângulo CBP é isósceles, pois seus ângulos com vértices em C e P medem 80°.

Observação importante 1: aqui usamos a hipótese de que $\mathrm{A\hat{C}B} = 80°$. Note que essa hipótese será a base de todas as construções feitas até chegarmos à solução final, diferentemente do que ocorreu em nossa tentativa de solução, na qual utilizamos, sim, que $\mathrm{A\hat{C}B} = 80°$, para concluir que $\mathrm{A\hat{C}E} = 30°$, que foi o que efetivamente usamos, e isso poderia ocorrer independentemente da hipótese $\mathrm{A\hat{C}B} = 80°$, conforme argumentamos na Seção 2.

Segue-se que $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BP}}$ e que $\mathrm{A\hat{P}B}$ mede 100°, suplementar adjacente de 80°.

Vemos, então, que o triângulo BPD tem os ângulos em B e D medindo 40°, que, em B, vem de $60° - 20°$ e, em D, de $180° - (100° + 40°)$. Logo, seus lados BP e PD são congruentes (veja a Figura 8). É notável que esse segmento BP produziu na situação apresentada dois triângulos isósceles! E não para por aí! Vejamos a Figura 9:

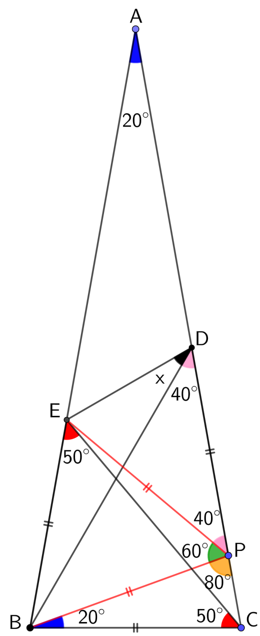

Figura 9: O triângulo CBE é isósceles.

O triângulo CBE é isósceles, pois os ângulos nos vértices C e E medem 50°, já que em B mede 80°. Logo $\overline{BC} = \overline{BE}$.

Observação importante 2: aqui usamos a hipótese de que $A\hat{B}C = 80°$. Essa observação, juntamente com a observação importante 1, garantem a permanência da hipótese de que o triângulo ABC é isósceles.

Assim, já obtivemos $\overline{BC} = \overline{BP} = \overline{BE} = \overline{PD}$. De $\overline{BP} = \overline{BE}$, segue-se que o triângulo BPE é isósceles. Como $E\hat{B}P$ mede 60° (vindo de $80° - 20°$), o triângulo é, na verdade, equilátero. Logo, $\overline{PE} = \overline{BP}$. Como $\overline{PD}$ também é igual a $\overline{BP}$, segue-se que o triângulo EPD é isósceles. Os ângulos de sua base medem $x + 40°$ e o ângulo em P desse triângulo mede $E\hat{P}D = B\hat{P}D – B\hat{P}E = (180° - 80°)–60° = 40°$. Logo, $(x + 40°) \cdot 2 + 40° = 180°$, de onde obtemos $x = 30°$.

Vale enfatizar, novamente, que essa solução sutilmente mantém a hipótese de o triângulo ABC ser isósceles, porque nela utiliza-se a subdivisão dos ângulos da base em $60° + 20°$ e $50° + 30°$ para deduzir que os demais triângulos obtidos também são isósceles, sendo que na nossa resolução utilizamos essencialmente apenas os ângulos de 20° e de 30°, deixando livres seus adjacentes, como já observado anteriormente.

4. Nossa segunda tentativa

Após explorar os ângulos que ocorrem no problema original sem chegar à solução, tomamos duas ações: a de compreender onde estava o nosso equívoco e, consequentemente, entender a razão do sutil artifício utilizado na solução usual; e a de oferecer uma solução simples e natural usando trigonometria, que passamos a apresentar.

Nesta seção usaremos a Figura 10 como referência. Os valores numéricos de ângulos que aparecem na figura são obtidos de forma simples, usando no máximo o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

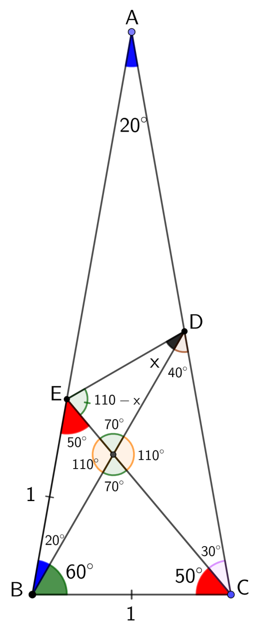

Figura 10: Ângulos naturalmente obtidos a partir dos dados do problema.

Para fixar uma escala, resolvemos considerar $\overline{\mathrm{BC}} = 1$.

Note que $\overline{\mathrm{BE}} = 1$, pois, como já vimos, o triângulo CBE é isósceles (dois ângulos internos medindo 50°).

Assim, aplicando a Lei dos Senos no triângulo BCD, obtemos $\frac{1}{\operatorname{sen}(40^\circ)} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\operatorname{sen}(80^\circ)}$.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo BDE, obtemos $\frac{1}{\operatorname{sen}(\mathrm{x})} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\operatorname{sen}(160^\circ - \mathrm{x})}$.

Isolando $\overline{\mathrm{BD}}$ em ambas as equações e igualando os valores, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}(160^\circ - \mathrm{x})}{\operatorname{sen}(\mathrm{x})} = \frac{\operatorname{sen}(80^\circ)}{\operatorname{sen}(40^\circ)}. \tag{8}$$

Porém, $\frac{\operatorname{sen}(80^\circ)}{\operatorname{sen}(40^\circ)} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(40^\circ)\cos(40^\circ)}{\operatorname{sen}(40^\circ)} = 2\cos(40^\circ) = 2\operatorname{sen}(50^\circ)$. Também, $\operatorname{sen}(160^\circ - \mathrm{x}) = \operatorname{sen}(20^\circ + \mathrm{x})$, pois os argumentos são ângulos suplementares. Assim, podemos reescrever a equação 8 da seguinte forma:

$$\operatorname{sen}(20^\circ + \mathrm{x}) = 2\operatorname{sen}(50^\circ)\operatorname{sen}(\mathrm{x}).$$

Portanto, $2\,\mathrm{sen}(50°)\,\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(x+20°) = \mathrm{sen}(x)\cos(20°) + \mathrm{sen}(20°)\cos(x)$. Como $x = 0$ não é a solução procurada, podemos dividir a equação por $\mathrm{sen}(x)$ para obter

$$2\,\mathrm{sen}(50°) = \cos(20°) + \mathrm{sen}(20°)\mathrm{cotan}(x),$$

ou seja,

$$\mathrm{cotan}(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}(50°) - \cos(20°)}{\mathrm{sen}(20°)} = \frac{2\,\mathrm{sen}(50°)}{\mathrm{sen}(20°)} - \mathrm{cotan}(20°) = \frac{2\,\mathrm{sen}(20° + 30°)}{\mathrm{sen}(20°)} - \mathrm{cotan}(20°) =$$

$$\frac{2\left(\mathrm{sen}(20°)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos(20°)\right)}{\mathrm{sen}(20°)} - \mathrm{cotan}(20°) = \sqrt{3} + \mathrm{cotan}(20°) - \mathrm{cotan}(20°) = \sqrt{3}.$$

Como x é um ângulo agudo com cotangente $\sqrt{3}$, concluímos que x mede $30°$.

5. Conclusão

Esse clássico problema de geometria elementar, assim como outros problemas de matemática elementar desafiadores, traz soluções sutis, difíceis de serem percebidas pelos estudantes e também por seus professores!

Invariavelmente, tais soluções são apresentadas sem quaisquer considerações sobre sua sutileza, como se elas fossem naturais, o que a nosso ver, tornam-se, distantes do estudante ou do leitor, embora apresentadas de forma impecável do ponto de vista lógico.

Como professores, consideramos que esses problemas devem ser enfrentados pelos estudantes e pelos seus professores de forma aberta, desnudando as dificuldades trazidas pelos problemas, trilhando caminhos naturais e, caso tais caminhos não conduzam a uma solução satisfatória, aí sim, apelar para artifícios sutis.

Essa postura gera uma aproximação entre o problema e o universo intelectual do estudante, entre o professor e o aluno e a discussão torna-se mais viva, humana, em vez de se dar num limbo de perfeições lógicas quase inalcançáveis.

No caso presente, nossa solução não dependeu da varinha mágica dada pela criação do segmento de reta BP. O ponto P foi escolhido de modo que o triângulo CBP fosse isósceles e semelhante ao triângulo ABC original. Esse segmento resolveu de modo brilhante o problema, mas haja inspiração para encontrá-lo! Já a nossa solução não dependeu de tanta inspiração, mas acionou de forma oportuna a trigonometria. A discussão dessas e outras soluções mostra ao estudante as ilimitadas possibilidades criativas oferecidas pela Matemática, deixando aberta a porta para a sua própria criatividade.

Agradecimentos

Pelas valiosas sugestões, deixamos nossos agradecimentos ao(à) *referee*.

Referências

[1] Langley, E. M. 644. "A Problem". *The Mathematical Gazette*, v. 11, n° 160 (Oct., 1922), p. 173.

[2] Programa de Iniciação Cientifica da Obmep. "Geometria - Aula 26 - Desafio: o problema do triângulo russo". Youtube, 27 ago. 2013. Disponível em: `<https://youtu.be/7jnlhPZoIjo>`. Acesso em: 01 jun. 2023.

Jamil Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto
<jamilfer@gmail.com>

Fábio Corrêa de Castro
Universidade Federal do Espírito Santo
<fabio.castro@ufes.br>

Recebido: 12/04/2022
Publicado: 14/08/2023