

A razão áurea e os números de Fibonacci

Yuri Teles Moura 

Resumo

Neste artigo abordam-se a razão áurea e os números de Fibonacci evidenciando a relação que há entre esses entes matemáticos já tão mistificados. Apresentam-se duas construções com régua e compasso de segmentos na razão áurea. Demonstra-se que a razão entre cada termo da sequência de Fibonacci, F_n , e seu predecessor, F_{n-1} , é tanto mais próxima da razão áurea quanto maior é o inteiro n . Prova-se a fórmula de Binet – a qual é utilizada para obter outras identidades – de duas maneiras, a saber: por meio da matriz de recorrência e a partir da equação característica. Demonstra-se a fórmula de Cassini, e obtém-se, mediante o método de Newton, uma sequência de aproximações que converge rapidamente para a razão áurea.

Palavras-chave: razão áurea; sequência de Fibonacci; fórmula de Binet; fórmula de Cassini; método de Newton.

Abstract

In this article, the golden ratio and Fibonacci numbers are addressed, highlighting the relationship that exists between these already mystified mathematical entities. There are two constructions with ruler and compass of segments in the golden ratio. It is shown that the ratio between each term of the Fibonacci sequence, F_n , and its predecessor, F_{n-1} , is closer to the golden ratio the greater is the integer n . Binet's formula – which is used to obtain other identities – is demonstrated in two ways, namely: through the recurrence matrix and from the characteristic equation. Cassini's formula is proven, and a sequence of approximations is obtained, using Newton's method, which quickly converges to the golden ratio.

Key-words: golden ratio; Fibonacci sequence; Binet's formula; Cassini's formula; Newton's method.

1. Introdução

Neste artigo desenvolvemos uma revisão bibliográfica cujo propósito é investigar a origem dos números de Fibonacci e da razão áurea, evidenciando a relação entre eles existente. Por acreditarmos que a matemática seja construída pelas pessoas que se dedicam a resolver problemas, identificar padrões, compreender relações – enfim, pessoas que buscam se apropriar dessa linguagem para, através dela, melhor poderem se expressar –, é que nos empenhamos em mencionar aquelas que se debruçaram sobre o tema e puderam contribuir para o seu desenvolvimento.

Na Seção 2, apresentaremos o contexto em que surge a razão áurea, bem como duas construções com régua e compasso de segmentos áureos. Definiremos triângulo áureo e veremos que ele aparece na construção do pentágono e decágono regulares. Definiremos também retângulo áureo, e

mostraremos que a curva resultante da união infinita de determinados arcos circulares aproxima a espiral logarítmica.

Na Seção 3, veremos como a sequência de Fibonacci emerge da solução de um problema sobre reprodução de coelhos, publicado no século XIII. Provaremos que, nessa sequência, a razão entre cada termo, F_n , e seu antecessor, F_{n-1} , é tanto mais próxima da razão áurea quanto maior é o inteiro n . Demonstraremos a fórmula de Cassini, mediante o princípio de indução finita, e a fórmula de Binet – que fornece F_n em função de sua posição na sequência, n –, associando a recorrência à sua equação característica e utilizando autovalores de uma matriz associada a essa sequência. Usaremos a fórmula de Binet para demonstrar algumas identidades. Por fim, obteremos uma sequência de aproximações para a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ por meio do método de Newton.

Destarte, esperamos convencer o leitor da importância desse assunto, com aplicação em diversas áreas da matemática, notadamente geometria, teoria dos números, álgebra linear e análise real, e que tem atraído a atenção de vários matemáticos. Nosso objetivo é apresentá-lo de forma simples e leve, além de enfatizar o caráter dinâmico dessa ciência cujo progresso apoia-se em nossa alegria de descobrir.

2. A razão áurea

O termo “proporção divina” foi utilizado por Fra Luca Pacioli, em 1509, e, possivelmente mais cedo, por Pier della Francesca, para designar a razão áurea. O matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) empregou as expressões *sectio divina* e *proportio divina* em seus trabalhos [1, p. 233].

A obra de Pacioli influenciou outros autores, fazendo pairar sobre a razão áurea certo misticismo: em um trabalho publicado em 1569, P. Ramus associou a Trindade às três partes da razão áurea; Kepler afirmou tratar-se de uma *joia preciosa*: “A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de um segmento de reta em uma proporção extrema e média; a primeira podemos comparar a uma medida de ouro, a segunda é uma joia preciosa” [1, p. 234].

No século XIX, em numerosos escritos, volumosos e pouco científicos, A. Zeising afirmou que a razão áurea domina música e arquitetura, além de ser a chave para compreender toda a morfologia. Inaugurando uma perspectiva científica, Fechner aplicou o método experimental a objetos produzidos com finalidades estéticas para concluir que o *retângulo áureo* é o que possui as proporções mais *agradáveis* [1, p. 235].

Definição 1. Um ponto C divide internamente um segmento AB na *razão áurea* quando sua maior parte, AC , é tantas vezes maior do que sua menor parte, CB , quanto o segmento todo, AB , é maior do que a maior parte, AC . Em símbolos,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}.$$

Como $AB = AC + CB$, podemos escrever $AC/CB = 1 + CB/AC$ e, fazendo $AC/CB = x > 0$, obtemos

$$x = 1 + \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Logo, o número real x que procuramos é igual ao seu inverso somado à unidade.

Multiplicando a Equação (1) por x , obtemos $x^2 = x + 1$, ou ainda

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (2)$$

Completando o quadrado,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0,$$

rearranjando os termos da equação e extraíndo-lhes a raiz quadrada, concluímos que

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ainda hemos de nos deparar com esses números algumas vezes ao longo da nossa discussão. Assim, por economia, referir-nos-emos às raízes da Equação (2) como

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Logo, porque positiva, a razão áurea $x = \alpha$.

2.1. Construção com régua e compasso

Nos Elementos de Euclides (publicados por volta de 300 a.C.), encontram-se as seguintes proposições [1, p. 232]:

1. “Cortar uma dada linha reta de sorte que o retângulo no segmento todo e em um dos segmentos seja igual ao quadrado no segmento restante” (Livro II, Proposição 11);
2. “Cortar uma dada linha finita em proporção extrema e média” (Livro VI, Proposição 30).

Conquanto essas proposições sejam equivalentes, em termos do enunciado, os métodos de construção provenientes delas são bastante distintos. As evidências apontam a segunda como sendo devida a Euclides, e a primeira, aos Pitagóricos (século V a.C.).

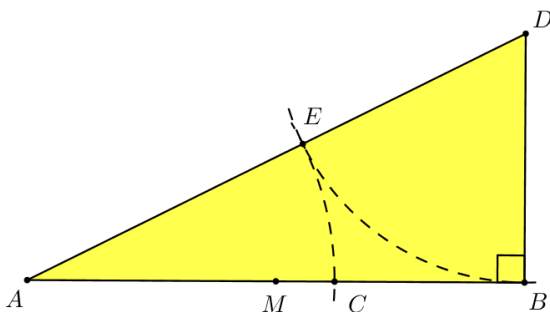


Figura 1: Construção de segmentos na razão áurea.

Para encontrar o ponto C , que divide o segmento AB na razão áurea, realizamos o procedimento descrito a seguir, ilustrado na Figura 1.

Primeiro, marca-se o ponto médio M do segmento AB . Com a ponta seca do compasso em B e abertura AM , toma-se o ponto D sobre a reta que é perpendicular a AB e passa por B . Traça-se, então, um círculo com centro em D e raio BD , que intersecta AD no ponto E . Por fim, traça-se um círculo com centro em A e raio AE , que intersecta AB no ponto C requerido.

De fato, nessas condições,

$$AB = 2BD = 2DE$$

e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD , retângulo em B , obtemos

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4BD^2 + BD^2 = 5BD^2,$$

ou seja, $AD = \sqrt{5}BD$. Posto que $DE = BD$,

$$AC = AE = AD - DE = \sqrt{5}BD - BD.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2BD}{(\sqrt{5} - 1)BD} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \alpha.$$

Apresentamos a seguir um outro método para construir segmentos áureos, frequentemente atribuído ao matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), que o empregou em suas construções. Entretanto, é provável que os Pitagóricos tivessem ciência do método [2, p. 244].

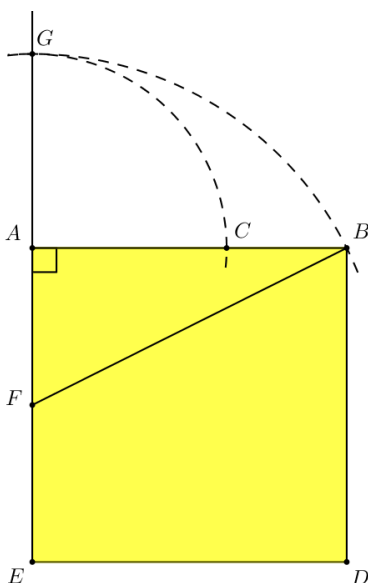


Figura 2: Outra construção de segmentos na razão áurea.

Começa-se por construir o quadrado ABDE da Figura 2. Marca-se o ponto médio F do lado AE e traça-se um círculo com centro em F e raio FB, que intersecta a semirreta \overrightarrow{FA} em G. Daí, traça-se um círculo com centro em A e raio AG, que intersecta AB no ponto C.

Com efeito, uma vez que $AB = 2AF$, aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo ABF, retângulo em A, para obter

$$FB^2 = AF^2 + AB^2 = AF^2 + 4AF^2 = 5AF^2.$$

Logo $FB = \sqrt{5}AF$ e, como $FG = FB$,

$$AC = FG - AF = FB - AF = \sqrt{5}AF - AF.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2AF}{(\sqrt{5} - 1)AF} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \alpha.$$

Dessa forma, aprendemos duas maneiras de dividir, com régua e compasso, segmentos na razão áurea. O leitor interessado encontrará nas Referências outras duas construções de segmentos áureos [3, 4].

2.2. Triângulos áureos

Na Proposição 10 do Livro IV de seus Elementos, Euclides utilizou segmentos áureos “para construir um triângulo isósceles com cada um dos ângulos da base medindo o dobro do ângulo remanescente”. A partir desse triângulo, ele constrói um pentágono regular (Livro IV, Proposição 11) [1, p. 233].

Definição 2. Um *triângulo áureo* é um triângulo isósceles cuja razão entre as medidas de um dos seus lados côngruos e da base é igual a α .

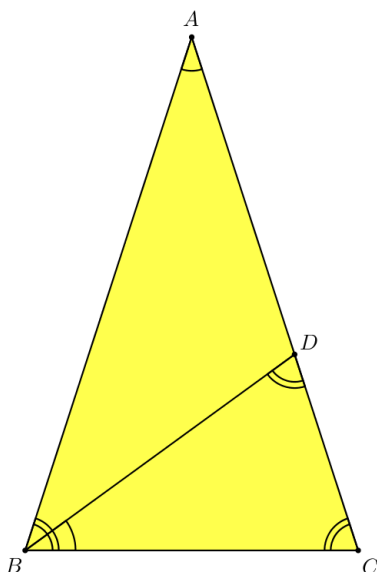


Figura 3: Triângulos áureos.

Os triângulos ABC e BCD da Figura 3 são áureos. No próximo lema veremos o procedimento utilizado para obter $\triangle BCD$ a partir de $\triangle ABC$.

Lema 1. *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo áureo e D um ponto sobre o lado AC que o divide na razão áurea (sendo $AD > DC$). Então $\triangle BCD$ também é um triângulo áureo e BD bissecta $\angle B$.*

Demonstração. Temos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \alpha,$$

$AC/AD = \alpha$ e $AC = AB$. Daí,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD},$$

e, como $\angle ABC = \angle BCD$, são semelhantes os triângulos ABC e BCD , pelo caso LAL de semelhança [5, p. 161]. Portanto, $\triangle BCD$ também é isósceles, e $\angle A = \angle CBD$, $\angle ABC = \angle C = \angle BDC$, conforme indica a Figura 3.

Isso quer dizer que $\triangle BCD$ é um triângulo áureo, porque isósceles e $BC = \alpha CD$. Além disso, $AD = BD$ pois

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC - CD}{BC} = \frac{AB}{BC} - \frac{CD}{BC} = \alpha - \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Logo, $\triangle DAB$ também é isósceles e, conseqüentemente, $\angle ABD = \angle A = \angle DBC$, ou seja, BD é bissetriz de $\angle B$. ■

No teorema a seguir estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que um triângulo isósceles seja áureo.

Teorema 1. *Um triângulo isósceles é áureo se, e somente se, seu ângulo interno não repetido mede 36° .*

Demonstração. Suponhamos seja áureo o ΔABC . Utilizando o Lema 1, fazendo $\angle A = x$ e somando os ângulos internos do triângulo BCD , obtemos $5x = 180^\circ$, donde $x = 36^\circ$.

Por outro lado, se ΔABC é isósceles, com $\angle A = 36^\circ$, então $\angle B = \angle C = 72^\circ$. Traçamos AD , bissetriz de $\angle B$, e vemos que os triângulos DAB e BCD são isósceles. Daí, $BD = AD = BC$ e ΔABC é semelhante a ΔBCD . Portanto,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD},$$

ou, já que $AC = AD + CD$ e $AD = BC$,

$$1 + \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{CD},$$

donde

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} = \alpha.$$

■

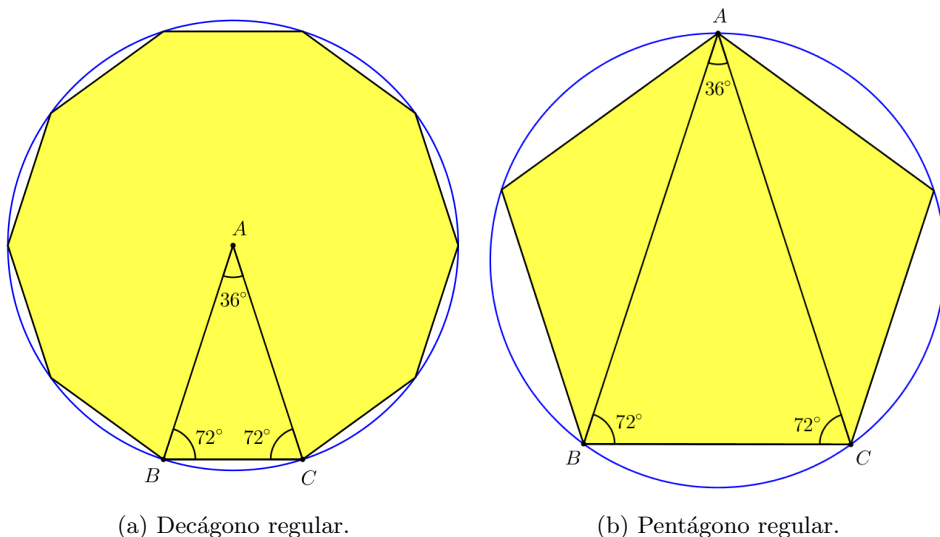


Figura 4: O triângulo áureo na construção de dois polígonos regulares.

Para ver que o triângulo ABC , destacado no decágono regular da Figura 4a, é áureo, primeiro, notamos que ele é isósceles, pois $AB = AC$ (raio do círculo circunscrito); depois, vemos que $\angle A = 360^\circ/10 = 36^\circ$ e aplicamos o Teorema 1.

Quanto ao da Figura 4b: cada ângulo interno do pentágono mede $(5 - 2)180^\circ/5 = 108^\circ$; cordas congruentes (os lados do pentágono regular não adjacentes ao vértice A) determinam ângulos sobre o círculo também congruentes [5, pp. 107-109]; logo, $\angle BAC = 108^\circ/3 = 36^\circ$ e, como as diagonais AB e AC do pentágono são congruentes, concluímos, do Teorema 1, que ΔABC é áureo.

2.3. Retângulos áureos

Na Sub-seção 2.1, vimos que a Proposição 11 do Livro II dos Elementos de Euclides trata da divisão dum segmento de reta tal que “o retângulo no segmento todo e em um dos segmentos seja igual ao quadrado no segmento restante”.

Sejam a e b as medidas das partes do segmento que resultam dessa divisão. Da igualdade do retângulo e do quadrado, isto é, de suas áreas, temos que $(a + b)b = a^2$, ou ainda, $ab + b^2 = a^2$. Dividindo essa equação por b^2 e fazendo $x = \frac{a}{b}$, obtemos $x + 1 = x^2$, cujas raízes – obtivemos no início desta seção – são α e β .

Definição 3. Denominamos *retângulo áureo* aquele cuja razão entre as medidas dos lados maior e menor é igual a α .

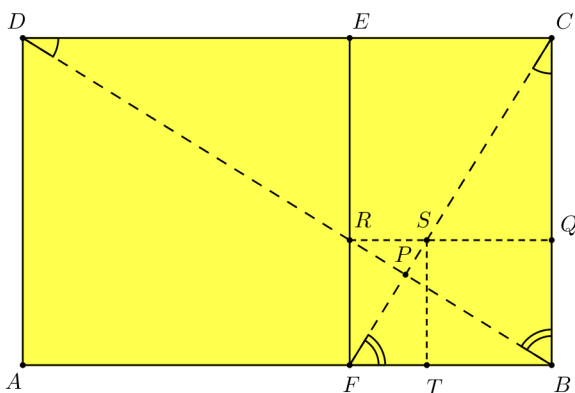


Figura 5: Retângulos áureos.

O retângulo ABCD da Figura 5, construído de sorte que $AB = \alpha BC$, é áureo, ao passo que o retângulo BCEF é áureo sempre que DAFE for um quadrado. Reciprocamente, DAFE é um quadrado sempre que BCEF for um retângulo áureo.

Teorema 2. *Seja $k > 1$ a razão entre o comprimento e a largura em um retângulo ABCD, do qual é removido o retângulo BCEF semelhante ao primeiro. Nessas condições, a razão entre as áreas dos retângulos original, ABCD, e remanescente, DAFE, é igual a k se, e somente se, $k = \alpha$. Além disso, $k = \alpha$ é condição necessária e suficiente para que DAFE seja um quadrado.*

Demonstração. Temos que $AB/BC = k$. Em virtude de os retângulos ABCD e BCEF serem semelhantes,

$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{FB}.$$

Suponhamos que a razão entre as áreas dos retângulos ABCD e DAFE seja igual a k :

$$\frac{AB \cdot BC}{AF \cdot FE} = k.$$

Daí, como $FE = BC$ e $FB = \frac{1}{k}BC$,

$$k = \frac{AB \cdot BC}{AF \cdot BC} = \frac{AB}{AF} = \frac{AB}{AB - FB}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{FB}{AB}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k} \frac{BC}{AB}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}},$$

isto é, $1/k = 1 - 1/k^2$. Multiplicando esta equação por k^2 obtemos $k = k^2 - 1$, donde $k = \alpha$ e, portanto,

$$\frac{AF}{FE} = \frac{AB - FB}{BC} = \frac{AB}{BC} - \frac{FB}{BC} = \alpha - \frac{1}{\alpha} = 1,$$

e DAFE é um quadrado.

Considerando DAFE um quadrado,

$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{AF + FB}{BC} = 1 + \frac{FB}{BC} = 1 + \frac{1}{k},$$

obtemos $k = \alpha$.

Suponhamos agora $k = \alpha$. Daí,

$$\frac{AB \cdot BC}{AF \cdot FE} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha^2}} = \alpha.$$

Definição 4. O *recíproco* de um retângulo é outro menor, semelhante ao primeiro, tendo com ele um lado comum.

Na Figura 5, BCEF é recíproco de ABCD. O quadrado DAFE é a menor figura que, adicionada a BCEF, forma um retângulo semelhante a ABCD [2, p. 288].

Teorema 3. *As diagonais de dois retângulos recíprocos são perpendiculares entre si.*

Demonstração. Seja P a intersecção das diagonais BD e CF dos retângulos recíprocos ABCD e BCEF, como na Figura 5.

Posto que

$$\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{BF} = \alpha,$$

os triângulos retângulos BCD e FBC são semelhantes. Logo, $\angle CBD = \angle BFC$ e $\angle BDC = \angle BCF$.

Assim, $\angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$ e, portanto, $\angle BPC = 90^\circ$, ou seja, BD é perpendicular a CF.

O Teorema 3 provê um método sistemático para a construção de retângulos recíprocos. De fato, partindo de ABCD e BCEF da Figura 5, obtemos o retângulo recíproco de BCEF, assim: tomamos R na intersecção de BD com EF, e traçamos QR perpendicular a BC. Tomar R sobre BD faz que BR seja perpendicular a CF, já que BD e CF são perpendiculares, e, do Teorema 3, BQRF é o retângulo recíproco de BCEF.

Sendo S a intersecção de CF com QR, traçamos ST perpendicular a BF, e o Teorema 3 garante-nos que FTSR é o retângulo (áureo) recíproco de BQRF.

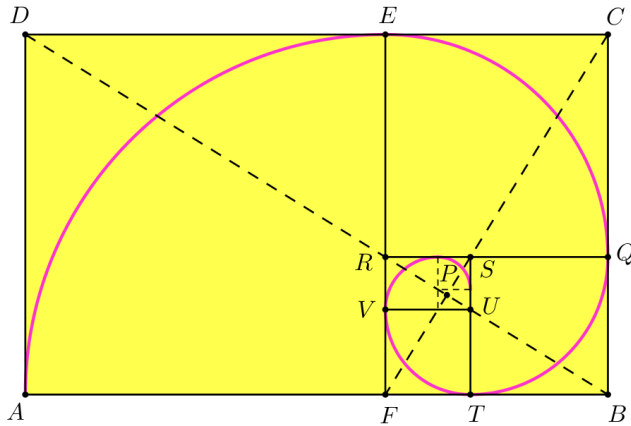


Figura 6: Espiral de arcos circulares.

Continuando esse procedimento indefinidamente, produzir-se-á uma sequência de retângulos áureos cada vez menores, como ilustra a Figura 6. A curva obtida da reunião dos sucessivos arcos circulares de raios iguais aos lados dos quadrados, DAFE, CERQ, BQST, TUVF etc., tangencia cada um dos retângulos áureos em pontos que os dividem na razão áurea. Esses pontos espiralam em direção a P, interseção das diagonais dos retângulos originais, e estão sobre a *espiral logarítmica* com polo em P.

Há uma sequência de infinitos pontos $\dots, V, T, Q, E, A, \dots$ cujas coordenadas polares

$$r = \alpha^n, \quad \theta = \frac{\pi}{2}n$$

satisfazem a equação $r = \alpha^{\frac{2\theta}{\pi}}$. Logo, todos esses pontos estão sobre a *espiral logarítmica*

$$r = \mu^\theta,$$

onde $\mu = \alpha^{\frac{2}{\pi}}$. A curva da Figura 6 apenas aproxima a *espiral logarítmica*, pois esta intersecta os lados dos quadrados em ângulos bem pequenos, em vez de tangenciá-los [6, p. 165].

3. Os números de Fibonacci

Leonardo Pisano (Figura 7) viveu entre 1170 e 1250 e foi o responsável por introduzir na Europa o sistema de numeração hindu-arábico que usamos hoje. Em seu *Liber Abaci*, publicado pela primeira vez em 1202, Fibonacci (filho de Bonacci), como ficou conhecido, apresentou o problema sobre reprodução de coelhos, que está relacionado à sua célebre sequência de números inteiros F_n .



Figura 7: Leonardo Pisano [2, p. 2].

Nesse problema, Fibonacci assumiu que os coelhos viveriam eternamente e que, a cada mês, um par de coelhos dá origem a um novo par, o qual torna-se produtivo a partir da idade de dois meses. No primeiro mês, o experimento começa com um par de coelhos recém-nascidos. Assim, no segundo mês ainda há apenas um par. No terceiro mês há 2; no quarto, 3; no quinto, 5; e assim por diante. Seja F_n o número de pares de coelhos no n -ésimo mês.

Quatro séculos mais tarde, em 1611, Kepler escreveu de forma explícita o que Fibonacci não pode ter deixado de notar: cada termo F_n , para $n \geq 2$, é obtido da soma dos dois termos antecedentes [6, p. 166], porquanto a sequência fica determinada pela fórmula recursiva

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (3)$$

e pelas condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Tabela 1: Os números de Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
F_{n+1}/F_n	∞	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6154	1,6190	1,6176	1,6182	...

Kepler observou também que, quanto maior é o inteiro n , mais as razões F_{n+1}/F_n aproximam-se do número

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618034,$$

como indicam os dados na terceira linha da Tabela 1.

Outros cem anos passaram-se antes que R. Simson (1687-1768) utilizasse a relação

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

para mostrar que a sequência das frações

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{1} &= \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} &= \frac{3}{2} = \frac{F_4}{F_3}, \\
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} &= \frac{5}{3} = \frac{F_5}{F_4}
 \end{aligned}$$

etc., converge para α .

Com efeito, dividindo a recorrência, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, da sequência de Fibonacci por F_n , obtemos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Fazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x,$$

concluimos que $x = 1 + 1/x$, ou seja, $x = \alpha$.



Figura 8: François-Édouard-Anatole Lucas (1842-1891).

O matemático francês Édouard Lucas (Figura 8) propôs diferentes condições iniciais para a sequência de Fibonacci. Os números, L_n , definidos pela recorrência

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad (4)$$

em que $n \geq 1$ e $L_0 = 2$, são chamados números de Lucas em sua homenagem.

Esses números satisfazem à relação

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad (5)$$

onde $n \geq 2$.

De fato,

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = F_{n-2} + F_{n-3} + F_n + F_{n-1} \\ &= F_{n-2} + F_n + F_{n-3} + F_{n-1} = L_{n-1} + L_{n-2}. \end{aligned}$$

Tabela 2: Os números de Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
L_{n+1}/L_n	0,5	3	1,3333	1,75	1,57	1,636	1,611	1,621	1,617	1,6184	1,6179	...

Assim, a sequência de Lucas é um tipo particular da de Fibonacci, e $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n+1}/L_n = \alpha$, como indicam os dados da Tabela 2.

3.1. Algumas identidades

A identidade no teorema abaixo, cuja prova faremos por indução, foi descoberta, em 1680, pelo matemático e astrônomo francês, nascido na Itália, Giovanni Domenico Cassini (1625-1712). Robert Simson (1687-1768), da Universidade de Glasgow, também a descobriu, de forma independente, em 1753 [2, pp. 74-75].

Teorema 4 (Cassini). *Seja n um inteiro ≥ 1 . Então,*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{6}$$

Demonstração. Dado que $F_0F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1 = (-1)^1$, a afirmação é válida para $n = 1$. Assumindo que a fórmula funcione para um inteiro $n > 1$ arbitrário,

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n - F_{n-1}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_n - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_n - (-1)^n - F_n^2 \\ &= F_{n+1}F_n - F_n(F_{n-1} + F_n) - (-1)^n \\ &= F_{n+1}F_n - F_nF_{n+1} - (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

e a fórmula funciona para $n + 1$. Logo, pelo princípio de indução finita, a afirmação é válida para todo inteiro $n \geq 1$. ■

Embora a fórmula de Cassini, Teorema 4, possa ser inferida de uma passagem citada por Kepler, ela é mais explicitamente utilizada por R. Simson, em seu trabalho publicado no ano de 1753. Foi a ela também, e, portanto, à sequência de Fibonacci, que Schlegel chegou, quando procurava generalizar o conhecido paradoxo geométrico de dividir um quadrado 8×8 em quatro partes que se encaixam no retângulo 5×13 . O leitor interessado poderá saber mais sobre o referido paradoxo e sua generalização nas Referências [2, pp. 100-106].

No próximo corolário fazemos uso da notação (a, b) para representar o maior divisor comum aos inteiros a e b .

Corolário 1. *Quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são relativos e mutuamente primos; isto é, $(F_{n+1}, F_n) = 1$, para todo n inteiro.*

Demonstração. Suponhamos n par (para n ímpar o raciocínio é análogo). Do Teorema 4,

$$F_{n+1}(F_{n-1}) + F_n(-F_n) = 1,$$

ou seja, pode-se escrever 1 como combinação linear dos números F_{n+1} e F_n . Isto implica que (F_{n+1}, F_n) divide 1 [7, p. 19]. Logo, $(F_{n+1}, F_n) = 1$. ■

Tratamos agora de obter um resultado que nos permitirá resolver recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Particularmente, a Recorrência (3), da sequência de Fibonacci.

A cada uma dessas recorrências, associamos sua *equação característica*, $r^2 + pr + q = 0$ [8, pp. 67-69]. Podemos supor $q \neq 0$, caso contrário a recorrência seria de primeira ordem.

Lema 2. *Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, então, qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = 0,$$

pois $r_1^2 + pr_1 + q = r_2^2 + pr_2 + q = 0$. ■

Teorema 5 (Binet). *Se α é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e β sua raiz negativa, então*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \quad (7)$$

Demonstração. À recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ associamos a equação característica $r^2 = r + 1$, cujas raízes, já sabemos bem, são iguais a α e β . Aplicando o Lema 2, obtemos

$$F_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n.$$

A fim de determinar as constantes C_1 e C_2 , pomos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ nessa expressão e obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

escrito em sua forma matricial. Multiplicando à esquerda pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix},$$

obtemos a solução

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

Portanto,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Já que a sequência de Lucas é um tipo particular da de Fibonacci, podemos escrever

$$L_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n.$$

Determinamos C_1 e C_2 pondo $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$ nessa expressão, obtendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sua solução é $C_1 = C_2 = 1$, logo

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{8}$$

Outra maneira de provar o Teorema 5 consiste em utilizar um expediente da álgebra linear [9, pp. 301-302].

Para esta abordagem, lembremos que um *autovalor*, λ , de uma matriz quadrada A , é tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, para um \mathbf{x} conveniente – o vetor \mathbf{x} é o *autovetor* de A associado a λ .

Assim, $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$, e essa equação tem solução não nula sempre que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(*equação característica* de A).

Se S é a matriz em cujas colunas dispõem-se os autovetores de A e Λ , a matriz diagonal em que estão dispostos os autovalores de A , então $A = SAS^{-1}$. Daí, $A^n = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) \cdots (S\Lambda S^{-1})$, com n parcelas iguais a $A = SAS^{-1}$. Usando a propriedade associativa do produto de matrizes, $A^n = S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1} \cdots S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^n S^{-1}$, pois $S^{-1}S = I$, a matriz identidade.

Considere a sequência $\{\mathbf{u}_n\}$ de vetores

$$\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1 = A^2\mathbf{u}_0, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_n = A^n\mathbf{u}_0, \quad \dots,$$

em que cada termo é obtido multiplicando-se a matriz A pelo termo antecedente, isto é,

$$\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k, \tag{9}$$

com k inteiro ≥ 0 .

Escrevendo \mathbf{u}_0 como uma combinação linear dos autovetores de A , ou seja, $\mathbf{u}_0 = S\mathbf{c}$, onde \mathbf{c} é o vetor contendo os coeficientes dessa combinação linear, obtemos $\mathbf{u}_n = S\Lambda^n\mathbf{c}$.

A chave aqui é começar com a Equação (9) (matricial). Esta é uma recorrência linear de primeira ordem para vetores, enquanto a Equação (3), da sequência de Fibonacci, é uma recorrência linear de segunda ordem para escalares. Relacionamos essas recorrências pondo dois números de Fibonacci em um vetor:

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix},$$

de modo que $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A regra $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ é escrita assim:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k.$$

Multiplica-se por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ em cada passo, e após n passos obtemos $\mathbf{u}_n = A^n \mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Subtraindo λ da diagonal de A ,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix},$$

donde

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

A equação $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, que já resolvemos na Seção 2, tem raízes iguais a

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Esses autovalores levam a autovetores $\mathbf{x}_1 = (\alpha, 1)$ e $\mathbf{x}_2 = (\beta, 1)$.

Encontramos então a combinação linear desses vetores que fornece $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

e multiplicamos \mathbf{u}_0 por A^n para obter \mathbf{u}_n :

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

o mesmo resultado a que chegamos linhas acima.

Essa identidade é conhecida como fórmula de Binet, em homenagem ao matemático francês Jacques-Philippe-Marie Binet (1786-1856), que a descobriu em 1843. Na verdade, a fórmula foi descoberta pela primeira vez em 1718, pelo matemático, também francês, Abraham De Moivre (1667-1754), utilizando funções geradoras. Daí, em 1844, outro francês, o engenheiro e matemático Gabriel Lamé (1795-1870), a descobriu de forma independente [2, p. 79].

De todo modo, a fórmula pode ser utilizada para obter uma miríade de outras identidades. Obteremos algumas a seguir.

Corolário 2 (Lucas). *Seja n um inteiro ≥ 0 . Então*

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}. \tag{10}$$

Demonstração. Utilizamos as relações $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha\beta = -1$ e as Identidades (7) e (8) para obter

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}^2 + F_n^2 &= \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{(\alpha^n - \beta^n)^2}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(\alpha^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \beta^{2n+2}) + (\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n})}{5} \\
 &= \frac{(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}) - 2\alpha^{2n}\beta^{2n}(1 + \alpha\beta) + (\alpha^{2n} + \beta^{2n})}{5} \\
 &= \frac{L_{2n+2} + L_{2n}}{5}.
 \end{aligned}$$

Empregando agora a Identidade (4),

$$\begin{aligned}
 L_{2n+2} + L_{2n} &= F_{2n+3} + F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n-1} \\
 &= F_{2n+2} + F_{2n+1} + 2F_{2n+1} + F_{2n-1} \\
 &= F_{2n+1} + F_{2n} + 3F_{2n+1} + F_{2n-1} \\
 &= 4F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n-1} \\
 &= 5F_{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = \frac{5F_{2n+1}}{5} = F_{2n+1},$$

como queríamos demonstrar. ■

Existem apenas dois números de Fibonacci distintos que são quadrados perfeitos: 1 e 144. Consequentemente, a Identidade (10), mostrada por É. Lucas, em 1876, tem uma bela interpretação geométrica: não há números de Fibonacci consecutivos que possam ser comprimentos de um triângulo retângulo.

Não obstante, o triângulo ABC, com $AC = F_k F_{k+3}$, $BC = 2F_{k+1} F_{k+2}$ e $AB = F_{2k+3}$, onde k é um inteiro ≥ 0 , é retângulo em C, conforme estabelecido por C. W. Raine, em 1948 [2, p. 79].

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 AC^2 + BC^2 &= (F_k F_{k+3})^2 + (2F_{k+1} F_{k+2})^2 \\
 &= (F_{k+2} - F_{k+1})^2 (F_{k+2} + F_{k+1})^2 + 4F_{k+1}^2 F_{k+2}^2 \\
 &= (F_{k+2}^2 - F_{k+1}^2)^2 + 4F_{k+1}^2 F_{k+2}^2 \\
 &= F_{k+2}^4 - 2F_{k+1}^2 F_{k+2}^2 + F_{k+1}^4 + 4F_{k+1}^2 F_{k+2}^2 \\
 &= F_{k+2}^4 + 2F_{k+1}^2 F_{k+2}^2 + F_{k+1}^4 \\
 &= (F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2)^2.
 \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2, $AC^2 + BC^2 = F_{2k+3}^2 = AB^2$. Assim, do teorema de Pitágoras, ΔABC é retângulo em C.

Corolário 3. *Seja n um inteiro ≥ 0 . Então,*

$$F_n L_n = F_{2n}. \tag{11}$$

Demonstração. Valemo-nos das Identidades (7) e (8):

$$F_n L_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^n + \beta^n) = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}.$$

A Identidade (11) implica que, quando $n \geq 3$, todo número de Fibonacci da forma F_{2n} (com índice par) é composto, isto é, possui pelo menos um divisor além do 1 e dele mesmo.

Aplicando-se a fórmula de Binet, do Teorema 5, pode-se obter também uma generalização para a fórmula de Cassini, do Teorema 4:

$$F_{n+k} F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2,$$

onde $n \geq k$, demonstrada pelo matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894), em 1879 [2, pp. 82-83].

3.2. O método de Newton e a razão áurea

No início desta seção, vimos que as *frações contínuas*

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

convergem para o número α .

Podemos também representar a razão áurea em termos de radicais. Com efeito, fazendo

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}},$$

obtemos

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}},$$

ou seja, $x^2 = 1 + x$. As raízes dessa nossa já conhecida equação são α e β , donde, porque positivo, $x = \alpha$.

As frações contínuas e os radicais acima fornecem métodos para a aproximação da razão áurea. Sua convergência, no entanto, é bastante lenta, como poderá verificar o leitor.

Em 1999, J. W. Roche, do Colégio La Salle de Wyndmoor, Pensilvânia, estimou a razão áurea utilizando o método de Newton para aproximar um dos zeros da função polinomial

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

No processo, ele encontrou uma relação entre as várias aproximações e os números de Fibonacci [2, pp. 245-246].

Usando o valor inicial $x_1 = 2$ e a fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

em que $f'(x_n)$ é a derivada de f no ponto x_n , ele encontrou as três seguintes aproximações:

$$x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{34}{21} \quad \text{e} \quad x_4 = \frac{1597}{987}.$$

Percebendo que todas elas são razões de números de Fibonacci consecutivos, conjecturou:

$$x_n = \frac{F_{2^{n+1}}}{F_{2^n}},$$

onde $n \geq 1$.

A validade da conjectura de Roche pode ser demonstrada mediante o princípio de indução finita e os Corolários 2 e 3.

De fato, uma vez que $F_3/F_2 = 2/1 = x_1$, a afirmação é válida para $n = 1$. Assumimos então que a fórmula funcione para um inteiro $n > 1$ arbitrário, isto é, que $x_n = F_{m+1}/F_m$, onde $m = 2^n$. Posto que $f'(x) = 2x - 1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1} = \frac{2x_n^2 - x_n - x_n^2 + x_n + 1}{2x_n - 1} \\ &= \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1} = \frac{F_{m+1}^2/F_m^2 + 1}{2F_{m+1}/F_m - 1} = \frac{F_{m+1}^2 + F_m^2}{F_m(2F_{m+1} - F_m)} \\ &= \frac{F_{2m+1}}{F_m(F_{m+1} + F_{m-1})} = \frac{F_{2m+1}}{F_m L_m} = \frac{F_{2m+1}}{F_{2m}}, \end{aligned}$$

a fórmula funciona para $n + 1$. Assim, pelo princípio de indução finita, a afirmação é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Em virtude de $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{m+1}/F_m = \alpha$, a sequência de aproximações $\{x_n\}$ converge para α .

4. Considerações finais

Vimos que o número $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$ emerge da divisão de um segmento na qual a razão entre maior e menor partes é igual à razão entre o segmento todo e a maior parte. Aprendemos duas maneiras de dividir, com régua e compasso, um segmento na razão áurea. Definimos triângulo áureo e vimos que ele aparece na construção tanto do decágono quanto do pentágono regulares. Definimos também retângulo áureo, e mostramos como obter sucessivos retângulos áureos recíprocos. A partir da união de quadrantes circulares, vimos surgir, nesses retângulos áureos, uma curva que aproxima a espiral logarítmica.

Conhecemos um pouco da história do matemático Leonardo Pisano, que ajudou a popularizar os algarismos hindu-arábicos por meio de seu *Liber Abaci*. Nesse livro, Fibonacci, como ficou conhecido, apresentou também o problema da reprodução de coelhos, em cuja solução figuram os números 1, 1, 2, 3, 5, 8 etc. A regra para sua célebre sequência, como ele não poderia ter deixado de notar, é que cada termo, F_n , é obtido da soma dos dois termos predecessores, F_{n-1} e F_{n-2} . Curiosamente, a razão F_n/F_{n-1} é tanto mais próxima do número α quanto maior é o inteiro n . Demonstramos essa afirmação. Apresentamos duas demonstrações para a fórmula de Binet e vimos como obter algumas identidades a partir dela. Vimos também que o princípio de indução pode ser utilizado para demonstrar a fórmula de Cassini e a convergência de uma sequência de aproximações para a raiz positiva do polinômio $x^2 - x - 1$.

Dessa forma, além de aprender diversos conceitos da geometria, álgebra linear, análise real e teoria dos números, pudemos apreciar algumas das contribuições de grandes matemáticos para a história e evolução desta ciência. A matemática, se bem que exata, é feita do esforço e dedicação diários daqueles que, abnegada e apaixonadamente, procuram desvendar-lhe os mistérios.

Agradecimentos

Agradeço à Juliana, que quis saber mais sobre a sequência de Fibonacci e a razão áurea e, assim, inspirou a criação deste artigo.

Agradeço ao amigo Tiago pela revisão precisa que fez no texto.

Agradeço à minha namorada, Aline, sem cujos carinhos e cuidados, não apenas esse artigo não seria possível, a vida teria menos cor, menos sabor, menos graça.

Referências

- [1] ARCHIBALD, R. C. *Golden section*. The American Mathematical Monthly, Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America, v. 25, n. 5, pp. 232-238, 1918. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2972652>>.
- [2] KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. (Pure and applied mathematics).
- [3] NIEMEYER, J. *A simple construction of the golden section*. Forum Geometricorum, v. 11, p. 53, 2011. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201105.pdf>>.
- [4] BATAILLE, M. *Another simple construction of the golden section*. Forum Geometricorum, v. 11, p. 55, 2011. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201106.pdf>>.
- [5] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar*. 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 2, Geometria Euclidiana. (Coleção do Professor de Matemática).
- [6] COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989. (New Mathematical Library).
- [7] ANDREWS, G. E. *Number Theory*. Philadelphia: W. B. Sanders Company, 1971.
- [8] LIMA, E. L. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*. 7ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2, Geometria Euclidiana. (Coleção do Professor de Matemática).
- [9] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. 4th ed., New York: Wellesley-Cambridge Press, 2009.

Yuri Teles Moura
Brasília, Distrito Federal
<yuriorim@gmail.com>

Recebido: 19/09/2020
Publicado: 15/04/2021