PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.3, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo928

Uma abordagem para o princípio da casa dos pombos no Ensino Fundamental através da resolução de problemas

Simone da Silva Martins Luciane Gobbi Tonet Fabiane Cristina Höpner Noguti

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de uma sequência didática, criada a partir de três atividades, que utilizam a Resolução de Problemas como forma de abordar o Princípio da Casa dos Pombos no nono ano do Ensino Fundamental. A dificuldade das questões elaboradas aumenta gradativamente, de forma que a primeira atividade utiliza material concreto, a segunda apresenta questões relacionadas ao cotidiano dos alunos e que exigem abstração, e a terceira e última atividade é um desafio bem mais complexo adaptado do Banco de Questões da Obmep. O objetivo desta proposta é mostrar como o estudo deste princípio, de enunciado tão simples, pode trazer benefícios para a aprendizagem dos alunos, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio lógico. Este artigo é proveniente da dissertação de mestrado de Martins (2019) [8] pelo Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Princípio da Casa dos Pombos; Resolução de Problemas

Abstract

This paper presents the result of the application of a didactic sequence, created from three activities, which use Problem Solving as a way to approach the Pigeonhole Principle in the ninth grade of Elementary School. The difficulty of the proposed activities increases gradually increases so that, the first activity uses concrete material, the second is related to students' everyday issues and require abstraction, and the third and last activity is a much more complex challenge. The goal of this work is to show how the study of this principle, with such a simple statement, can bring benefits for students' learning, especially with regard to the development of logical reasoning. This is a paper from the master's dissertation of Martins (2019) [8] from PROFMAT - Professional Master in Mathematics on National.

Keywords: Math Education, Pigeonhole Principle, Problem Solving

1. Introdução

O Princípio da Casa dos Pombos normalmente não é um conteúdo trabalhado no Ensino Básico, ficando restrito ao Ensino Superior e cursos preparatórios para concursos. No entanto, Brasil (2018) [4] apresenta como competência da disciplina de matemática o desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentação, habilidades essas que podem ser desenvolvidas por meio desse conteúdo.

Além disso, a simplicidade de seu enunciado, aliada à inexistência de fórmulas complexas, torna-o uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas dos mais variados níveis de dificuldade. Por esse motivo, acredita-se que esse conteúdo possa ser utilizado para despertar o interesse do aluno pela matemática, desmistificando um pouco a disciplina e auxiliando no desenvolvimento das habilidades previstas para esse componente curricular.

Para tanto, este trabalho apresenta uma proposta de atividade que utiliza a Resolução de Problemas e a manipulação de material concreto com o objetivo de desenvolver gradualmente a compreensão do Princípio da Casa dos Pombos com alunos de Ensino Fundamental.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [3], a Resolução de Problemas deve ser considerada como uma orientação para o ensino, já que possibilita a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Através dela o aluno constrói conceitos articulados com outros conceitos, dando um maior sentido ao conteúdo estudado.

Neste trabalho foi dado um enfoque especial ao ensino da matemática no Ensino Fundamental, apresentando, além de uma proposta de estudo para o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas, uma análise dessa execução. Tal perpspectiva retrata um diferencial, pois, analisando as dissertações apresentadas até o momento ao Profmat – Mestrado Professional em Matemática em Rede Nacional, que abordam o Princípio da Casa dos Pombos, é possível perceber que a maior parte delas apresenta propostas de atividades ou relatos de experiências direcionados aos conteúdos do Ensino Médio, como pode ser observado em [16, 1, 11, 5, 13]. Outras trazem diferentes aplicações do princípio, servindo de suporte a professores que desejam abordar o conteúdo em suas aulas, como em [14, 9].

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na segunda seção o Princípio da Casa dos Pombos é enunciado, e, na sequência, encontra-se um breve relato histórico sobre a Resolução de Problemas. Na terceira seção são descritas a metodologia adotada e as três atividades elaboradas para o nono ano do Ensino Fundamental com o propósito de explorar o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas. Na quarta seção são expostas algumas resoluções dos problemas propostos, bem como os resultados das aplicações das atividades. A quinta seção reproduz as considerações finais nas quais implementam-se sugestões para futuras aplicações da proposta.

2. Referencial Teórico

Nesta seção, apresenta-se a fundamentação teórica do Princípio da Casa dos Pombos e um breve estudo sobre o ensino através da Resolução de Problemas.

2.1. Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos, o qual será denominado daqui em diante por PCP, também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet, Princípio das Gavetas ou até mesmo Princípio de Dirichlet. De acordo com [6], o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1839) tem seu nome associado ao princípio por ter sido o primeiro matemático a utilizar esse método para resolver problemas não triviais.

Segue, então, seu enunciado:

Teorema 1. *Dadas n casas e n+1 pombos pode-se afirmar que se forem distribuídos os pombos nas casas, pelo menos uma casa ficará com mais de um pombo.*

A seguir, um dos problemas que constituem a proposta deste trabalho ilustra sua aplicação.

Exemplo: Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

Nesse caso, considera-se que o número de casas é igual ao número de cores, isto é, $n=4$. O número de pombos corresponde ao número de bolinhas. Como se quer uma repetição, deve-se ter $n+1=5$ pombos. Portanto, retirando-se cinco bolinhas é possível afirmar que, pelo menos, duas serão da mesma cor.

O resultado a seguir apresenta o Princípio Geral da Casa dos Pombos. Neste caso, basta considerar k=1 para retornar ao PCP usual.

Teorema 2. *Dadas n casas e nk+1 pombos, pode-se afirmar que em pelo menos uma das casas haverá k+1 pombos.*

Na maioria das vezes, a grande dificuldade em se resolver questões que envolvam o PCP está em distinguir o que deve ser considerado como "casa" e o que deve ser considerado como "pombos". Após feita essa identificação, praticamente não há maiores problemas em se aplicar o princípio. Como exemplo, outro problema que constitui essa proposta é apresentado.

Exemplo: Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

O fato de uma das informações fornecidas não ser relevante para a resolução do problema pode gerar confusão na identificação de "casas"e "pombos", considerando o público-alvo das atividades. Neste caso, o número de casas é dado pelo número de turmas, ou seja, $n=13$. Os pombos representam os alunos. Como se quer dois em alguma das casas, são necessários, pelo menos, $n+1 = 13+1 = 14$ pombos. Portanto, a partir do 14º sorteado é possível afirmar que haverá pelo menos dois alunos de uma mesma turma.

2.2. Resolução de Problemas

Baseada na Teoria Significativa, de Willian Brownell, a partir da segunda metade da década de 1930 a ênfase do ensino de Matemática passou a ser sobre o desenvolvimento da aprendizagem e não somente sobre o resultado final, como era considerada anteriormente. Neste sentido, a Resolução de Problemas começou a despontar como uma teoria que vai ao encontro dessa demanda. Ela foi desenvolvida, inicialmente, pelo matemático e pesquisador George Polya, que a difundiu através do livro *A arte de resolver problemas*. Esta obra foi publicada em 1945 e é um dos livros mais vendidos do mundo moderno [10, 15].

No entanto, foi somente a partir de 1980 que a Resolução de Problemas passou a integrar os currículos como uma proposta de aprendizagem, inicialmente nos Estados Unidos e após expandindo-se para outros países ao redor do mundo. Foi nesse mesmo ano que o NCTM [1] dos EUA publicou um documento chamado "An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's", contendo recomendações para o ensino da matemática, dentre as quais indicava que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar durante a década de 1980 [3, 2, 10].

[1]National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional dos Professores de Matemática)

Na metodologia de ensino através da Resoluçao de Problemas, os conteúdos matemáticos são trabalhados a partir de um problema previamente escolhido pelo professor com a finalidade de motivar a aprendizagem. Neste tipo de abordagem, os conteúdos tornam-se ferramentas para a resolução do problema proposto, o qual atribui mais sentido ao que está sendo estudado.

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.80)[12] "Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo coconstrutores de seu próprio conhecimento, e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo".

Propiciar ao aluno a oportunidade de se tornar ativo e responsável pelo próprio aprendizado aumenta sua autoestima. Ao resolver o problema, o aluno apropria-se de suas habilidades matemáticas, ocorrendo então um empoderamento em relação à disciplina.

De acordo com a BNCC, a Resolução de Problemas é uma estratégia para a aprendizagem que pode ser implementada ao longo do Ensino Fundamental como forma de auxiliar no desenvolvimento de competências como o raciocínio lógico, representação, comunicação e argumentação.

Da mesma forma, os PCN [3] apresentam a Resolução de Problemas como um dos caminhos possíveis para "se fazer matemática" em sala de aula, atribuindo ao aluno o papel de protagonista na construção de sua aprendizagem.

Por acreditar nos benefícios advindos desse tipo de estratégia, no que se refere a esta proposta, as atividades elaboradas com a finalidade de estudar o PCP estão baseadas no ensino através da Resolução de Problemas, atendendo a demanda dos documentos norteadores da educação básica brasileira.

3. Metodologia

Esta pesquisa foi realizada na forma de um estudo de caso no qual as atividades elaboradas foram aplicadas em uma turma do 3º ano do 3º ciclo, correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Vereador Antônio Giúdice, localizada em Porto Alegre/RS. Ela integra a dissertação de mestrado de Martins (2019) [8], defendida em agosto do mesmo ano da publicação, na Universidade Federal de Santa Maria, e na qual é possível encontrar mais detalhes sobre aplicação realizada.

3.1. Descrição dos Sujeitos da Pesquisa

A escola onde ocorreu a aplicação da proposta atende, em grande maioria, alunos de baixa renda, muitos deles em situação de vulnerabilidade social.

As atividades foram desenvolvidas em uma das turmas regulares da primeira autora deste artigo, composta por 32 alunos que frequentavam as aulas no turno da manhã. Salienta-se que um deles era portador de necessidades educativas especiais devido ao comprometimento cognitivo causado pelas crises de epilepsia que sofreu quando ainda era bebê.

Quase todos os estudantes já haviam sido alunos regulares da professora em anos anteriores, o que garantia um vínculo afetivo entre os mesmos. Era habitual a perda de alguns minutos no início das aulas devido à conversa entre os alunos. Entretanto, eles costumavam se comprometer com as atividades propostas nas aulas de matemática, apresentando boa produção.

3.2. Propostas de Atividades

Na primeira atividade foram propostos problemas que envolviam o PCP e que eram passíveis de representação por meio de material concreto. Os alunos formaram grupos de três a quatro integrantes. Neste contato inicial, não havia exigência de rigor matemático relacionado ao conteúdo. No decorrer da aula, composta por 2 períodos de 45 minutos, era esperado que os alunos conseguissem responder as perguntas propostas através da manipulação do material e da interação entre eles próprios e que, no decorrer do processo, começassem a realizar abstrações, diminuindo a necessidade de manipular material concreto.

Na segunda atividade, os problemas propostos abordavam temas relacionados com a realidade dos alunos, tais como data de nascimento e dias da semana. Nesta etapa, não foram mais utilizados materiais concretos e mantiveram-se os grupos formados na aula anterior. Almejava-se que depois da primeira aula utilizando o material concreto, os alunos conseguissem abstrair e generalizar a estratégia de resolução, respondendo a problemas mais complexos.

Na terceira atividade foi proposto um problema que exigiu abstração e compreensão do PCP. Era esperado que, após as duas primeiras aulas, os alunos conseguissem, dessa vez sem a interação em pequenos grupos, solucionar uma questão mais complexa, proposta no sentido de desafio.

Em cada uma das atividades foi entregue uma folha, contendo o enunciado dos problemas, para que os alunos pudessem registrar suas respostas individualmente. Durante a aplicação, a professora circulou pela sala, tentando auxiliar na resolução por meio de perguntas, instigando, mas sem fornecer o resultado. A avaliação foi realizada no decorrer da aula, a partir da observação da ação dos alunos mediante os problemas propostos e também posteriormente, através da análise dos registros de cada aluno. Considera-se que a atividade foi positiva, pois os alunos mostraram-se motivados e conseguiram aplicar o PCP em diferentes situações do cotidiano, respondendo a maioria dos problemas propostos corretamente. A seguir serão descritos os problemas que foram disponibilizados aos alunos.

3.2.1 Problemas Propostos para a Atividade 1

Salienta-se que os problemas aqui destacados foram especialmente elaborados para esta atividade.

A) Dentro de um estojo há quatro canetas pretas, cinco canetas azuis, duas vermelhas e uma verde. Distribuindo aleatoriamente as canetas desse estojo para que um grupo de pessoas assine um cartão de aniversário para um amigo, e considerando que não haverá trocas de canetas e cada um assinará com a cor que receber, quantas canetas devem ser distribuídas, no mínimo, para se ter certeza de que duas dessas pessoas assinarão o cartão com a mesma cor?

B) Quantas cartas devem ser retiradas aleatoriamente de um baralho embaralhado, para se ter certeza de que pelo menos três das cartas retiradas tenham naipes iguais?

C) No refeitório da escola estão sendo oferecidas três opções de fruta para lanche, banana, maçã e melancia. Em uma das turmas vai um aluno de cada vez retirar seu lanche. Quantos alunos devem ir ao refeitório para que se possa afirmar que dois alunos, pelo menos, escolheram a mesma fruta?

D) Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

E) Em um envelope há cartões verdes e laranjas. Quantos cartões devem ser retirados do envelope para que se tenha pelo menos três cartões da mesma cor?

F) Uma escola dispõe de quatro cores de tintas para pintar suas salas de aulas, rosa, amarelo, azul e lilás. Cada sala de aula será pintada na cor mais votada por cada turma. Para conferir a pintura, a diretora fará vistoria sala por sala. Em quantas salas ela deverá entrar, no mínimo, para encontrar duas salas pintadas com a mesma cor?

G) Em uma loja há camisetas de duas cores distintas para serem vendidas (branca ou preta). Quantas camisetas devem ser vendidas, no mínimo, para que seja possível afirmar que foram vendidas três camisetas da mesma cor?

A Figura 1 ilustra os materiais utilizados para esta atividade.

Figura 1: Material utilizado para ilustração dos problemas da atividade 1

Para a ilustração do problema A foi disponibilizado um estojo com o mesmo número e cores de canetas mencionadas no enunciado. Para o problema B, um baralho de cartas. Para a ilustração do problema C foram disponibilizadas figurinhas com desenhos das frutas oferecidas no refeitório. Para o problema D, uma caixa com bolinhas nas mesmas cores e quantidades mencionadas no enunciado. Para o problema E foi disponibilizado um envelope contendo diversos cartões verdes e laranjas. Para o problema F, uma planta baixa do prédio da escola e quatro cores de tintas diferentes, e, para o problema G, diversas miniaturas de camisetas brancas e pretas confeccionadas em papel.

3.2.2 Problemas Propostos para a Atividade 2

Novamente, destaca-se que os problemas aqui listados foram especialmente elaborados para tal atividade.

1) Conte o número de alunos presentes na sala hoje.

a) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que fazem aniversário no mesmo mês?

b) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que farão (ou já fizeram) aniversário em um mesmo dia da semana neste ano?

2) Se for realizada uma votação para escolher o professor conselheiro da turma, em um grupo de dez professores, quantos alunos devem votar, no mínimo, para que se possa afirmar que um professor recebeu dois votos?

3) Em um grupo de três alunos é possível afirmar que há, no mínimo, quantas pessoas do mesmo sexo?

4) Quantas pessoas deveriam ter na sala para que se possa afirmar que, pelo menos, duas nasceram em um mesmo dia? (não necessariamente no mesmo mês. Exemplo: 17 de agosto e 17 de janeiro)

5) Será feita uma gincana na escola. Haverá cinco equipes nas quais os alunos poderão se inscrever. Supondo que ordenadamente os alunos da turma escolham a sua equipe, a partir de qual aluno será possível afirmar que haverá dois alunos da turma em uma mesma equipe?

6) Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

3.2.3 Problema Proposto para a Atividade 3

O problema proposto nesta atividade foi adaptado da Questão 10 do nível 3 do Banco de Questões da Obmep de 2016.

Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo k= 1, 2, ... , 2019. Ou seja, há uma bola com o número 1, duas bolas com o número 2 e assim sucessivamente. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?[**?**]

4. Resultados e Discussão

Na sequência são expostas algumas resoluções apresentadas, bem como um relato da aplicação das atividades descritas na seção anterior.

4.1. Atividade 1

No dia em que a atividade 1 foi aplicada, 28 alunos estavam presentes. A maioria escutou com atenção as orientações e se mostrou empolgada com a proposta. O tempo planejado de dois períodos para a execução da atividade foi suficiente, embora alguns alunos não a tenham finalizado. Ressalta-se que, nestes casos, foram a falta de comprometimento e distração que prejudicaram o andamento da tarefa.

Alguns alunos destacaram-se na aula, compreendendo rapidamente o raciocínio necessário para a resolução dos problemas e auxiliando os demais colegas. Ao longo da aula, a necessidade da manipulação do material concreto foi diminuindo, o que atendeu a expectativa das autoras para esse momento. No final da mesma, muitos alunos mostraram seu progresso ao descartar o uso do material concreto e realizar abstrações sobre as situações propostas nos problemas.

Dezesseis alunos responderam todas as questões, o que representa pouco mais da metade da turma. A maioria dos 12 alunos remanescentes entregou a folha de respostas faltando poucas questões. Apenas dois alunos entregaram a atividade em branco. Um deles afirmou não ter compreendido que cada aluno deveria entregar a sua atividade individualmente. O outro, portador de necessidades educativas especiais, não estava disposto nesse dia, embora tivesse condições de responder os problemas que estavam sendo propostos.

A seguir é realizada uma análise dos resultados apresentados pelos alunos. A Figura 2 ilustra uma das respostas fornecidas para o problema A.

Figura 2: Resposta apresentada para o problema A

O aluno afirma que a resposta é "5 porque tem 4 cores, impossível não repetir 2x na 5ª". Muitos alunos apresentaram justificativas semelhantes, o que demonstra que, embora não tenham sido apresentados formalmente ao PCP, eles conseguiram compreender a sua lógica através da manipulação do material concreto, da interação entre os colegas dentro dos grupos e pelos questio-namentos da professora.

Na Tabela 1 são apresentadas informações quantitativas sobre o êxito dos alunos em suas resoluções.

Problema	**Número de alunos que responderam**	**Número de respostas corretas**	**Percentual de acerto entre os que responderam**
A	21	21	100%
B	20	16	80%
C	26	25	96,1%
D	21	18	85,7%
E	21	18	85,7%
F	26	26	100%
G	21	17	80,9%

Tabela 1: Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 1.

Durante a aplicação da atividade 1, observou-se que os alunos apresentaram mais dificuldades nos problemas B, E e G, todos relacionados com o Princípio Geral da Casa dos Pombos. Isso se confirma quando analisamos os resultados apresentados na Tabela 1. Além disso ressalta-se a grande dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere a justificar adequadamente a solução para esses problemas, como ilustra a Figura 3.

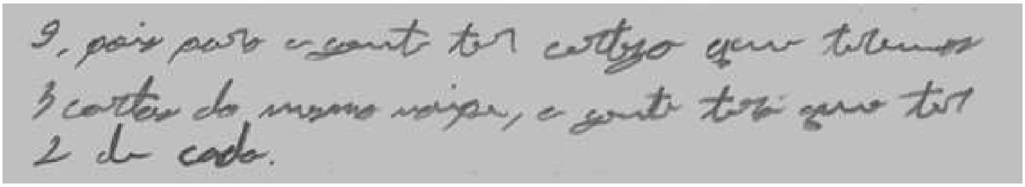
9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada.

Figura 3: Resposta apresentada para o problema B

O aluno afirma que são "9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada.". Embora o resultado esteja correto, sua justificativa é bastante confusa, situação recorrente nesses problemas.

Nos problemas A e F os alunos apresentaram mais facilidade, respondendo-os corretamente. Ambos abordam o caso usual do PCP.

Considerando os percentuais de acerto apresentados na Tabela 1, é possível afirmar que os alunos apresentaram bom desempenho na atividade 1.

Houve uma boa receptividade dos alunos à aula, percebida inclusive pelos comentários de "muito legal essa aula" no final do período.

4.2. Atividade 2

Muitos alunos iniciaram a aula questionando se uma continuidade à aula anterior seria dada. Estavam presentes 26 alunos neste dia. Novamente, dois alunos não entregaram a atividade, não sendo os mesmos da aula anterior. Todos os demais responderam-na completamente, e a grande maioria mostrou-se empenhada. O tempo planejado de dois períodos para a atividade foi suficiente e adequado.

Mais uma vez, alguns alunos destacaram-se e responderam rapidamente quase sem auxílio da professora. Outros alunos tiveram mais dificuldades, especialmente na primeira questão, a qual abordava o caso geral do princípio.

Em diversos momentos, foi necessário que a professora auxiliasse com questionamentos que favorecessem a compreensão. Por exemplo, para auxiliar na resolução do problema 1 (a), a professora indagou se era possível que, em um grupo de 12 pessoas, cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente das demais. Na sequência, os alunos eram questionados sobre o que aconteceria se houvesse uma pessoa a mais nesse grupo. Dezenove alunos responderam corretamente este problema e a Figura 4 ilustra uma das justificativas apresentadas.

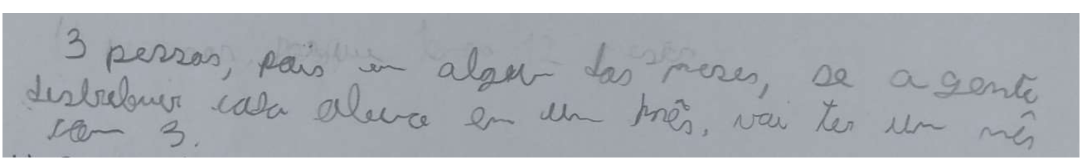
3 pessoas, pois em algum dos meses, se a gente distribuir cada aluno em um mês, vai ter um mês com 3.

Figura 4: Resposta apresentada para o problema 1(a)

O aluno afirma que são necessárias “3 pessoas, pois em algum dos meses, se a gente distribuir cada aluno em um mês, vai ter um mês com 3.”. Esse exemplo confirma a dificuldade apresentada pelos alunos em justificar adequadamente as soluções dos problemas relacionados com o Princípio Geral da Casa dos Pombos.

Os problemas 3, 5 e 6, abordando o caso usual do PCP, foram respondidos corretamente por todos os alunos. A Figura 5 ilustra uma das respostas apresentadas para o problema 5.

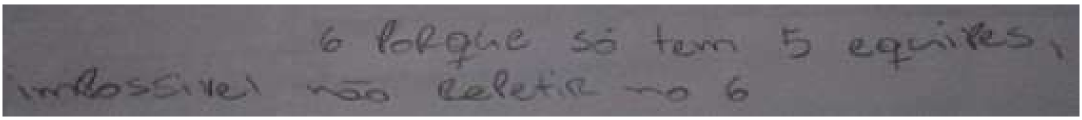

Figura 5: Resposta apresentada para o problema 5

Neste caso o aluno responde “6 porque só tem 5 equipes, impossível não repetir no 6” o que demonstra boa compreensão e clareza na justificativa.

A Tabela 2 apresenta informações quantitativas das respostas observadas na aplicação da atividade 2.

Problema	**Número de alunos que responderam**	**Número de respostas corretas**	**Percentual de acerto entre os que responderam**
1A	24	19	79,1%
1B	24	12	50%
2	24	22	91,6%
6	24	24	100%
4	24	19	79,1%
5	24	24	100%
6	24	24	100%

Tabela 2: Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 2.

Embora não houvesse a obrigatoriedade de responder os problemas na ordem em que apareciam, a maioria dos alunos assim o fez. Como o nível de dificuldade era similar, é possível pressupor que o nível de compreensão foi aumentando no decorrer da aula, já que as últimas duas questões não apresentaram erros.

Conforme a Tabela 2, o problema 1, versando sobre o caso geral do PCP, apresentou o menor índice de acerto. Ressalta-se que nos problemas 1 e 3 são fornecidos os dados necessários para se determinar o número de repetições decorrentes, o que os difere dos demais problemas propostos. No entanto, o problema 3 aborda o PCP usual e, todos os alunos que responderam o fizeram corretamente. Essa análise reforça a dificuldade apresentada pelos alunos relacionada ao caso geral do PCP.

No geral, os alunos apresentaram muitas dúvidas no início da aula, mas evoluíram bem no decorrer da mesma e, no final, já conseguiam responder as perguntas corretamente e sem auxílio, demonstrando compreensão da lógica presente nos problemas. Com exceção do item b do problema 1, é possível afirmar que os alunos apresentaram bom desempenho na atividade 2.

4.3. Atividade 3

A aula iniciou retomando as questões das aulas anteriores, enfatizando que todos os problemas trabalhados, inclusive o desafio que seria proposto na sequência, abordavam a mesma lógica. A fim de auxiliá-los na resolução do desafio, perguntou-se: quantas pessoas são necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas fazem aniversário em um mesmo mês?

No quadro, foram descritas todas as possibilidades de meses. Imaginando um grupo formado por 12 pessoas, distribuiu-se cada uma em um mês diferente e se questionou se aquela situação seria possível. O grupo foi ampliado de tal forma que cada mês ficasse com exatamente três pessoas. No que segue, discutiu-se sobre o que aconteceria se esse grupo tivesse uma 37ª pessoa. Concluiu-se que o número de pessoas necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas façam aniversário em um mesmo mês é

$$37 = 36 + 1 = 12.3 + 1 \tag{1}$$

Na sequência, a professora leu o enunciado do desafio para a turma, informando que ele era realmente mais complexo que os demais, necessitando, possivelmente, de mais empenho por parte de cada um. A maior parte da turma encarou o desafio com seriedade e tentou resolvê-lo. Tanto que o tempo de 1 período estipulado inicialmente para a atividade precisou ser ampliado para 2 períodos.

Explicou-se o que o problema pedia e um desenho ilustrativo das bolinhas, semelhante ao da Figura 6, foi feito no quadro.

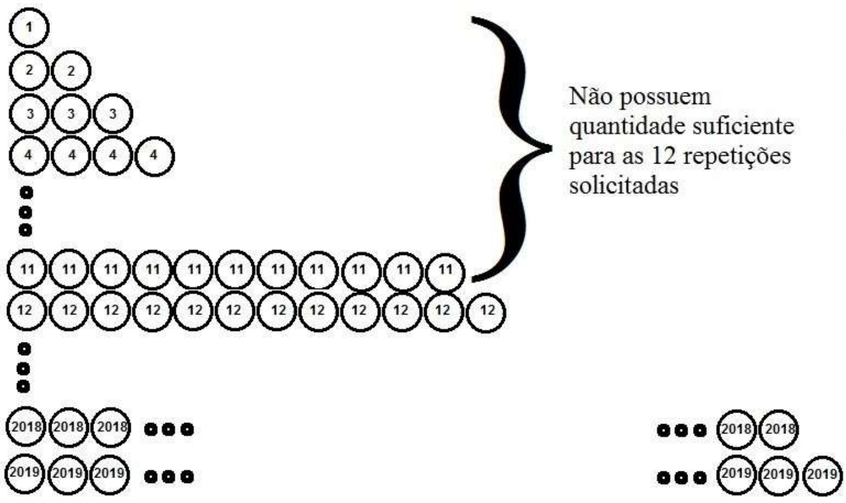

Figura 6: Ilustração do desafio feito no quadro

Foi explicado que as primeiras bolinhas não tinham quantidade suficiente para serem repetidas 12 vezes, no que se sugeriu separar o exercício em dois casos. As bolinhas de 1 a 11, que não poderiam se repetir 12 vezes, seriam o primeiro caso e, as bolinhas de 12 a 2019, que poderiam se repetir

12 vezes, o segundo caso. Reforçou-se que o cálculo do segundo caso era semelhante ao exemplo inicial da aula.

Nove alunos entregaram a atividade em branco, o que não é considerado ruim, dada a complexidade do problema proposto e que alguns desses fizeram isso após algumas tentativas inconclusivas. Ressalta-se que mais de um aluno pediu que a resolução do desafio fosse explanada na aula seguinte.

Dos 16 alunos que entregaram algo escrito, seis respostas destacaram-se. Três chegaram muito perto do resultado, apresentando um raciocínio próprio ou seguindo as dicas dadas. Outros três acertaram o problema completamente, dois deles seguindo as dicas e um terceiro usando uma estratégia própria. A Figura 7 ilustra uma das respostas apresentadas ao desafio.

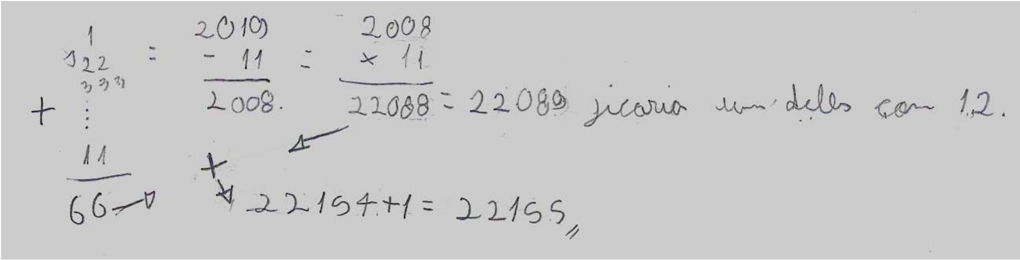

Figura 7: Resposta correta apresentada ao desafio

Percebe-se que, neste caso, o aluno contou as bolinhas com numeração inferior a 11 e aplicou o PCP nas bolinhas com numeração superior, seguindo assim a sugestão da professora para obter o resultado correto.

Outro aluno que apresentou resultado correto utilizou uma estratégia própria bastante interessante, conforme ilustra a Figura 8.

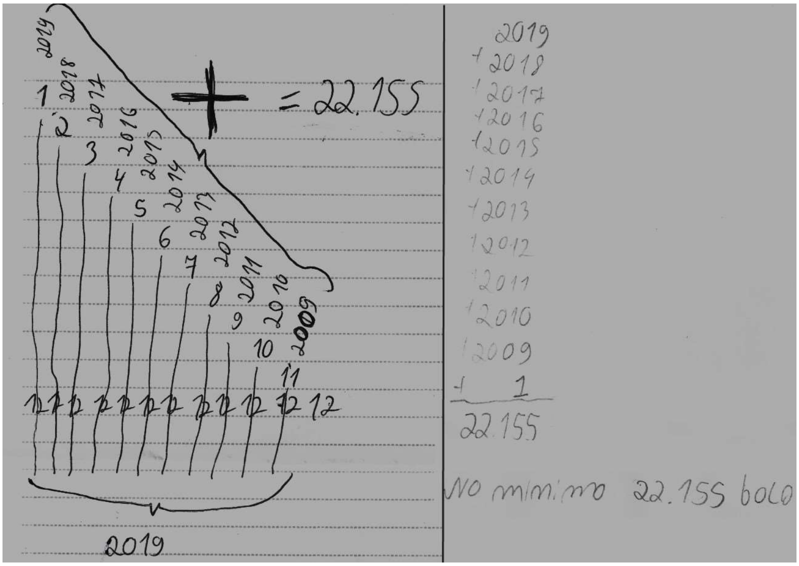

Figura 8: Resposta correta apresentada ao desafio

Esse aluno explicou sua estratégia oralmente, na qual se baseia a descrição a seguir. Suponha que sejam retiradas todas as primeiras bolinhas de todos os números. Isso corresponde a 2019 bolinhas. Depois retiram-se todas as segundas bolinhas de cada. Como a bolinha 1 não possui segunda bolinha, são 2018 segundas bolinhas. Após retirar todas as 2017 terceiras bolinhas de cada número, repete-se esse processo até que sejam retiradas todas as 11 bolinhas de todas as bolinhas, que serão 2009. A próxima bolinha a ser retirada certamente será a 12ª bolinha de alguma das bolinhas. O resultado será então a soma de todos esses valores de bolinhas retiradas.

$$2019 + 2018 + 2017 + \cdots + 2009 + 1 = 22155 \tag{2}$$

Em geral os alunos solicitaram bastante auxílio no decorrer da aula. Nesses momentos eram informados se estavam no caminho certo ou se mudanças em suas estratégias faziam-se necessárias. Essa orientação sempre era feita através de questionamentos.

Considerando a complexidade do problema e que originalmente o mesmo era destinado a alunos do Ensino Médio (Nível 3 – Obmep) avalia-se que os resultados apresentados foram bastante satisfatórios.

5. Considerações Finais

O propósito desse artigo consiste em apresentar uma maneira de introduzir o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental, de forma a valorizar o aprendizado desses alunos e tornar a aula de matemática mais interessante.

O grande diferencial dessa pesquisa está no fato de que a sua aplicação ocorreu em uma turma regular do Ensino Fundamental e não em um grupo de estudantes selecionados formando uma sala de aula irreal. Isso fez com que aparecessem situações adversas e muito comuns em qualquer sala de aula, tais como os alunos que entregaram a atividade em branco, os que não compreenderam a proposta e não expuseram suas dúvidas e os que faltaram e perderam a sequência do trabalho.

No entanto, mesmo com as dificuldades, avalia-se que a aplicação da proposta foi muita positiva. Os alunos mostraram-se motivados e a interação dentro dos pequenos grupos favoreceu a resolução dos problemas que eram propostos. Por isso, considera-se que a Resolução de Problemas foi uma ótima estratégia de ensino.

Durante a aplicação das atividades uma dificuldade maior foi percebida nos exercícios que envolviam o caso geral do Princípio da Casas dos Pombos, para os quais os índices de acertos foram menores. Com base nisso, sugere-se que, em uma próxima aplicação, a primeira atividade seja dividida em duas partes. A primeira parte destinada somente a exercícios sobre o caso usual do princípio, para que assim os alunos consigam fixar melhor o conceito antes de executar os exercícios sobre o caso geral, para o qual seria dedicada a segunda parte da atividade. Para tanto, recomenda-se acrescentar outros exercícios em cada uma dessas partes, ampliando o tempo de aplicação da proposta. Também sugere-se finalizar a atividade 2 com o problema inicial, já que este é o único que aborda o caso geral do Princípio da Casa dos Pombos nessa atividade.

Embora a proposta tenha sido elaborada para um nono ano, acredita-se que ela possa ser executada em outros anos do Ensino Fundamental.

Tendo em vista a análise apresentada, considera-se que a proposta de atividade presente neste trabalho atingiu os objetivos almejados, conseguindo estimular os alunos ao aprendizado e sendo muito gratificante aos envolvidos.

Referências

[1] Aguiar, T. P. *Princípio da casa dos pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem* . Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

[2] Allevaro, N. S. G.; Onuchic, L. R *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?* In: Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justulin, A. M. (orgs). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.

[3] Brasil, Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

[4] Brasil, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 17/03/2020.

[5] Costa, A. L. B. *O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico*. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

[6] Holanda, B. *Princípio da Casa dos Pombos I*. Programa Olímpico de Treinamento. Curso de Combinatória Nível 2, 2012. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/02/Aula07-PCPI_bruno.pdf>. Acesso em: 27/03/2019.

[7] IMPA/OBMEP. *Banco de questões 2016*. Rio de Janeiro, Impa, 2016.

[8] Martins, S. S. *Uma Abordagem para o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas*. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

[9] Moraes Júnior, O. F.*O Princípio da Casa dos Pombos e a Contagem Dupla*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

[10] Morais, R. S.; Onuchic, L. R. "Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas". *In*: Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justulin, A. M. (orgs). *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 17-34.

[11] Muniz Júnior, C. A. *Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

[12] Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. "Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas". *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

[13] Pacífico, T. M. *O Princípio das Gavetas de Dirichlet – Problemas e Aplicações*. Dissertação (mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

[14] Paiva, V. B. *Sobre Pombos e Gavetas*. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal de São João del-Rei, 2014.

[15] Polya, G. *A Arte de Resolver Problemas*. 1945. Título em inglês: "How to solve it: a new aspect of mathematical method". Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[16] Zonta, C. A. *O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com metodologia ativa de aula invertida*. 2019. 66f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.

Simone da Silva Martins
Universidade Federal de Santa Maria
<simonesmartins86@gmail.com>

Luciane Gobbi Tonet
Universidade Federal de Santa Maria
<lucianegobbi@yahoo.com.br>

Fabiane Cristina Höpner Noguti
Universidade Federal de Santa Maria
<fchnoguti@gmail.com>

Recebido: 02/10/2020
Publicado: 21/05/2021