PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.3, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo933

Sistema de amortização constante ou Tabela Price: Qual escolher no financiamento habitacional?

Keila Santos   Rubens Ortega

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo detalhado e comparativo a respeito dos modelos matemáticos utilizados em financiamentos habitacionais no Brasil, a saber, o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price). Para se chegar às conclusões que poderão auxiliar cidadãos na escolha de qual modelo é o mais adequado à sua realidade, faz-se uso dos aplicativos Excel e GeoGebra para observar padrões e formular conjecturas para, em seguida, comprovar matematicamente os resultados. Esse assunto está alinhado aos objetivos da Estratégia Nacional de Educação Financeira e à Base Nacional Comum Curricular, pois fornece subsídios para tomada de decisões financeiras racionais por parte dos cidadãos. O tema é parte do que foi desenvolvido em uma Dissertação de Mestrado do Profmat[1] [3].

Palavras-chave: Educação Financeira; Financiamento Habitacional; Sistema de Amortização Constante; Sistema Francês de Amortização; Tabela Price.

Abstract

The present work presents a detailed and comparative study about the mathematical models used in housing financing in Brazil, namely, the Constant Amortization System (CAS) and the French Amortization System (Price Table). In order to reach the conclusions that may help citizens in choosing which model is the most appropriate to their reality, Excel and GeoGebra software are used to observe patterns and formulate conjectures to then prove the results mathematically. This subject is in line with the objectives of the National Strategy for Financial Education and the Common National Curriculum Base, as it provides subsidies for citizens to make rational financial decisions. The theme is part of what was developed in a Master's Dissertation of the Profmat [3].

Keywords: Financial Education; Housing Finance; Constant Amortization System; French Amortization System; Price Table.

1. Introdução

Possuir imóvel próprio é desejo de grande parte da população brasileira. Por ser um bem de valor elevado quando comparado à renda média das pessoas, adquiri-lo à vista exigiria anos de espera,

[1]Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - www.profmat-sbm.org.br/

eventualmente décadas, além de muita determinação na construção de uma poupança pessoal. Tal realidade faz com que as pessoas optem por contrair um financiamento habitacional.

Atualmente, no Brasil, são ofertadas duas maneiras para se pagar o empréstimo da aquisição da casa própria, processo que pode levar até 35 anos: o "Sistema de Amortização Constante" e a "Tabela Price". O presente trabalho traz uma discussão matemática a respeito dos dois modelos, mostrando as diferenças entre eles, com objetivo de esclarecer o cidadão na tomada de decisão sobre qual escolher. Esse tema relevante de Educação Financeira[2] (SAC ou Price?) foi e continua sendo objeto de diversas abordagens na comunidade acadêmica (por exemplo, [2]), e a pergunta a ser respondida é: *No momento de realizar um financiamento habitacional, qual sistema de pagamento da dívida é o mais apropriado a cada um?*

De acordo com estudo técnico realizado pela Ecconit Consultoria Econômica [1], encomendado pela Abrainc (Associação Brasileira de Incorporadoras Imobiliárias), divulgado em novembro de 2020, o Brasil possuía *deficit* habitacional de aproximadamente 7,8 milhões de unidades em 2019, sendo que a demanda projetada para 2030 é de aproximadamente 11,4 milhões de unidades habitacionais. Esse cenário mostra a importância para a próxima década das políticas públicas voltadas à habitação, pois milhões de brasileiros precisam e precisarão do financiamento imobiliário para aquisição da casa própria.

Diante de tal realidade, é possível prever que muitos dos nossos jovens estudantes, em alguma fase da idade adulta, irão recorrer ao crédito imobiliário para realizarem o sonho do imóvel próprio. E ao contratar um financiamento habitacional, o cidadão precisa optar entre o SAC e a Tabela Price. É comum, porém, que não disponha de informações suficientes para realizar a escolha mais adequada ao seu perfil financeiro. Este artigo apresenta resultados que ajudam nessa tomada de decisão.

Desde a crise econômica global de 2008, ou crise do *subprime*[3], a relevância do tema Educação Financeira foi acentuada, sendo que vários estudos sobre o impacto do seu ensino nas escolas vêm sendo conduzidos em diversos países. A partir da instituição da Enef em 2010, diversos projetos de lei para inserção da Educação Financeira de forma obrigatória nas escolas brasileiras foram discutidos. Esse movimento para incorporar a Educação Financeira na cultura da sociedade brasileira contribuiu para que o tema passasse a integrar a Base Nacional Comum Curricular[4], tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Para finalizar esta Introdução, destacam-se os seguintes objetivos do trabalho:

1. Contribuir com o cidadão na sua vida real, mostrando as características e fazendo a comparação dos dois tipos de financiamento habitacional praticados atualmente no Brasil;

2. Contribuir com o Ensino de Educação Financeira no País, em alinhamento à Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef) e à Base Nacional Comum Curricular (BNCC);

[2] *"A Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) é uma mobilização em torno da promoção de ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no Brasil. O objetivo da ENEF, criada através do Decreto Federal 7.397/2010, e renovada pelo Decreto Federal nº 10.393, de 9 de junho de 2020, é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. A nova ENEF reúne representantes de 8 órgãos e entidades governamentais, que juntos integram o Fórum Brasileiro de Educação Financeira."* O site da ENEF é https://www.vidaedinheiro.gov.br/.

[3] A crise do *subprime* teve origem nos EUA, tendo sido motivada pela concessão de empréstimos hipotecários de alto risco, prática que levou vários bancos à insolvência, repercutindo fortemente sobre a Economia de todo o mundo.

[4] *A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, em todo o Brasil.* O site da BNCC é http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

3. Contribuir com o Ensino de Matemática, mostrando, através de aplicativos de fácil acesso aos estudantes, como é possível conjecturar fatos para, na sequência, demonstrá-los matematicamente.

Para isso, na Seção 2 são apresentados os resultados básicos dos sistemas de amortização utilizados nos financiamentos habitacionais no Brasil. A Seção 3 faz uso de aplicativos para implementar cálculos e obter imagens de gráficos dos elementos envolvidos nos financiamentos, com objetivo de se observar padrões ao se comparar os sistemas de amortização e, a partir disso, conjecturar sobre a validade matemática desses padrões. Na Seção 4 são demonstrados os resultados que confirmam, matematicamente, as conjecturas levantadas na Seção 3.

2. Sistemas de Amortização

Atualmente, no Brasil, quando se contrata um financiamento habitacional, pode-se optar entre dois sistemas para o pagamento da dívida ao longo do tempo: o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização, mais conhecido como *Tabela Price*. Os elementos envolvidos nos cálculos são: o valor do financiamento (a dívida D), o tempo para sua quitação (n), a taxa de juros pactuada (i) e a prestação ou parcela mensal (P). É importante destacar que cada prestação paga tem duas componentes: uma parte abate o valor da dívida, chamada de amortização (A), e outra parte paga juros do empréstimo (J). Assim, tem-se em cada mês que

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{J}.$$

2.1. Sistema de Amortização Constante (SAC)

O SAC é o método de pagamento de uma dívida em que a parcela de amortização (A) é constante e a parcela de juros (J), que incide sobre o saldo devedor, é decrescente ao longo do prazo de financiamento. Isto significa que a prestação (P) diminui a cada mês.

Teorema 1. *No SAC, sendo* D_0 *a dívida contraída,* n *o número de pagamentos e* i *a taxa de juros, tem-se*

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_k^{SAC} &= \frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{n}}, \qquad & \mathrm{D}_k^{SAC} &= \frac{\mathrm{n}-\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\mathrm{D}_0, \\ \mathrm{J}_k^{SAC} &= \mathrm{i} \times \mathrm{D}_{k-1}^{SAC}, \qquad & \mathrm{P}_k^{SAC} &= \mathrm{A}_k^{SAC} + \mathrm{J}_k^{SAC}, \\ \sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{P}_k^{SAC} &= \left[1 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{n}+1)\right]\mathrm{D}_0, \end{aligned}$$

onde:

A_k^{SAC} *é a parcela de amortização no mês* k *(a mesma para todos os meses),*

D_k^{SAC} *é o valor da dívida após o pagamento do mês* k*,*

J_k^{SAC} *é a parcela de juros no mês* k*,*

P_k^{SAC} *é a prestação no mês* k*, e*

$\sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{P}_k^{SAC}$ *é a soma de todas as* n *parcelas do financiamento.*

Demonstração. Como no SAC a amortização é a mesma em todas as n parcelas, basta dividir o valor do empréstimo por n, o que dá $A_k^{SAC} = \frac{D_0}{n}$. Após o pagamento de k parcelas, o total pago é $kA_k^{SAC} = k\frac{D_0}{n}$. Assim, a dívida atualizada neste momento é $D_k^{SAC} = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n}D_0$. Fazendo uso das relações para J_k^{SAC} e P_k^{SAC}, que são óbvias, e D_k^{SAC}, tem-se:

$$P_1^{SAC} = \frac{D_0}{n} + iD_0,$$

$$P_2^{SAC} = \frac{D_0}{n} + iD_1^{SAC} = \frac{D_0}{n} + i\frac{n-1}{n}D_0,$$

$$\cdots$$

$$P_n^{SAC} = \frac{D_0}{n} + iD_{n-1}^{SAC} = \frac{D_0}{n} + i\frac{n-(n-1)}{n}D_0.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = n\frac{D_0}{n} + iD_0\left[1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{n-(n-1)}{n}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = D_0 + iD_0\left(\frac{1}{n}\right)[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = D_0 + iD_0\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{(n+1)n}{2}\right] = \left[1 + \frac{i}{2}(n+1)\right]D_0.$$

□

2.2. Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)

A Tabela Price[5] aplicada ao pagamento de uma dívida caracteriza-se por ter sua prestação mensal (P) constante durante todo o período de financiamento. Como a parcela de juros (J) decresce com o tempo, pois incide sobre o saldo devedor e a cada mês a dívida diminui, tem-se que a amortização (A) é crescente ao longo do tempo.

Para se entender a Tabela Price, é preciso conhecer o conceito de série uniforme.

Uma série uniforme de pagamentos é uma sequência de pagamentos iguais e igualmente espaçados no tempo. O valor A de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a

$$A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Para se ver isso, basta atualizar todas as n parcelas da série para o tempo 0 (momento em que se contrai a dívida). Assim, o valor A da série na época 0 (um tempo antes do primeiro pagamento) fica

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

[5]Este método foi apresentado em 1771 por Richard Price (Inglaterra, 1723-1791) em sua célebre obra da área financeira e atuarial, intitulada *Observations on Reversionary Payments*.

que é a soma de n termos de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Tem-se

$$A = \left(\frac{P}{1+i}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}},$$

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Essa última igualdade é a base para o resultado a seguir.

Teorema 2. *No Sistema Francês de Amortização, sendo* D_0 *a dívida contraída,* n *o número de pagamentos e* i *a taxa de juros, tem-se*

$$P_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}D_0,$$

$$D_k^{\text{Price}} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}D_0,$$

$$J_k^{\text{Price}} = iD_{k-1}^{\text{Price}},$$

$$P_k^{\text{Price}} = A_k^{\text{Price}} + J_k^{\text{Price}},$$

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}D_0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}}D_0,$$

onde:

A_k^{Price} *é a parcela de amortização no mês* k,

D_k^{Price} *é o valor da dívida após o pagamento do mês* k,

J_k^{Price} *é a parcela de juros no mês* k,

P_k^{Price} *é a prestação no mês* k *(a mesma para todos os meses), e*

$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}$ *é a soma de todas as* n *parcelas do financiamento.*

Demonstração. Substituindo A por D_0 e P por P_k^{Price} em $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtém-se

$$D_0 = P_k^{\text{Price}}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow P_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}D_0.$$

Após o k-ésimo pagamento, o número de parcelas restantes para quitar o financiamento é $n-k$. Assim, a dívida atualizada nesse momento é

$$D_k^{\text{Price}} = P_k^{\text{Price}}\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo a fórmula de P_k^{Price} na igualdade anterior, tem-se

$$D_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \Leftrightarrow D_k^{\text{Price}} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0.$$

Por outro lado, sendo $A_k^{\text{Price}} = P_k^{\text{Price}} - J_k^{\text{Price}}$, e usando as relações de P_k^{Price}, J_k^{Price} e D_{k-1}^{Price}, vem

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0 - iD_{k-1}^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0 - i\frac{1-(1+i)^{-[n-(k-1)]}}{1-(1+i)^{-n}} D_0,$$

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0 \left[1-\left[1-(1+i)^{-n+k-1}\right]\right] = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0 \left[(1+i)^{-n+k-1}\right].$$

Multiplicando numerador e denominador por $(1+i)^n$, obtém-se

$$A_k^{\text{Price}} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Para finalizar, posto que no Price a prestação é a mesma em todas as n parcelas, o cálculo da soma de todos os valores pagos é obtido multiplicando P_k^{Price} por n:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} = nP_k^{\text{Price}} = \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}} D_0.$$

□

3. Exemplos comparativos entre financiamentos no SAC e na Tabela Price

Para ilustrar como funcionam os dois sistemas, a Figura 1 mostra a imagem de uma planilha comparativa entre o SAC e a Tabela Price, para um financiamento de R$ 122.400,00 em 360 meses, a uma taxa de $0,57\%$ ao mês.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Planilha Comparativa entre o SAC e a Tabela Price**										
2	Esta planilha mostra o status comparativo das três primeiras e das três últimas prestações de um financiamento pelo SAC e pela Tabela Price.										
3	Na última linha, é possível ver os valores do financiamento no mês k, digitando na Célula A21 o mês desejado (3 < k < n-2).										
4											
5	**D_0**	**R$ 122.400,00**									
6	**n**	360									
7	**i**	0,57%									
8											
9	**SAC**						**Price**				
10		**Amortização**	**Saldo Devedor**	**Juros**	**Prestação**			**Prestação**	**Juros**	**Amortização**	**Saldo Devedor**
11	**k**	**A_k**	**D_k**	**J_k**	**P_k**		**k**	**P_k**	**J_k**	**A_k**	**D_k**
12	**0**		**R$ 122.400,00**				**0**				**R$ 122.400,00**
13	**1**	R$ 340,00	R$ 122.060,00	R$ 697,68	R$ 1.037,68		**1**	R$ 801,22	R$ 697,68	R$ 103,54	R$ 122.296,46
14	**2**	R$ 340,00	R$ 121.720,00	R$ 695,74	R$ 1.035,74		**2**	R$ 801,22	R$ 697,09	R$ 104,13	R$ 122.192,33
15	**3**	R$ 340,00	R$ 121.380,00	R$ 693,80	R$ 1.033,80		**3**	R$ 801,22	R$ 696,50	R$ 104,72	R$ 122.087,60
16											
17	**358**	R$ 340,00	R$ 680,00	R$ 5,81	R$ 345,81		**358**	R$ 801,22	R$ 13,55	R$ 787,67	R$ 1.588,84
18	**359**	R$ 340,00	R$ 340,00	R$ 3,88	R$ 343,88		**359**	R$ 801,22	R$ 9,06	R$ 792,16	R$ 796,68
19	**360**	R$ 340,00	R$ 0,00	R$ 1,94	R$ 341,94		**360**	R$ 801,22	R$ 4,54	R$ 796,68	R$ 0,00
20											
21	**180**	R$ 340,00	R$ 61.200,00	R$ 350,78	R$ 690,78		**180**	R$ 801,22	R$ 514,83	R$ 286,39	R$ 90.034,19
22											
23	**SAC**	**Soma dos Valores Pagos no Financiamento SAC**			**R$ 248.331,24**		**Price**	**R$ 288.439,36**	**Soma dos Valores Pagos no Financiamento Price**		

Figura 1: **Planilha comparativa entre financiamentos no SAC e Tabela Price**
Fonte: Os autores

Esta planilha, elaborada no Excel[6], pode ser usada por quem queira simular um financiamento real, e funciona da seguinte maneira:

(a) nas células B5, B6 e B7, respectivamente, o usuário digita o valor do empréstimo (D_0), o número de meses (n) do financiamento e a taxa mensal de juro (i) aplicada ao contrato;

(b) a partir da linha 9, as colunas A, B, C, D e E mostram valores do SAC, enquanto que as colunas G, H, I, J e K mostram valores da Tabela Price;

(c) as linhas 13, 14 e 15 mostram os valores da Amortização (A_k), do Saldo Devedor (D_k), dos Juros (J_k) e da Prestação (P_k) nos 3 primeiros meses do financiamento, tanto pelo SAC quanto pela Tabela Price, enquanto que as linhas 17, 18 e 19 fazem o mesmo para os 3 últimos meses;

(d) ao digitar na célula A21 qualquer número inteiro k, $3 < k < n - 2$, pode-se ver, na linha 21, a posição no mês k de A_k, D_k, J_k e P_k, tanto para o SAC quanto para a Tabela Price (no exemplo, usou-se o mês $k = 180$, exatamente quando se completa metade das prestações);

(e) as células E23 e H23 mostram as somas de todas as prestações do financiamento pagas pelo SAC e pela Tabela Price, respectivamente.

Observando todos os dados da planilha, destacam-se:

(a) as 3 primeiras Prestações são maiores no SAC, sendo que a 180ª e as 3 últimas Prestações são maiores na Tabela Price;

(b) as 3 primeiras e a 180ª Amortizações são maiores no SAC, sendo que as 3 últimas Amortizações são maiores na Tabela Price;

(c) no segundo, no terceiro, no 180º e nos 3 últimos meses, os Juros no SAC são menores que na Tabela Price;

(d) em todos os meses da planilha, o Saldo Devedor no SAC é menor que na Tabela Price, com exceção, obviamente, do 360º mês, quando se dá a quitação do financiamento;

(e) após o pagamento da 180ª Prestação, o Saldo Devedor no SAC é exatamente 50% da dívida contraída (paga-se metade das prestações e quita-se metade da dívida), enquanto que na Tabela Price é pouco mais de 73% (neste exemplo, paga-se metade das prestações e quita-se apenas pouco mais de 26% da dívida);

(f) a linha 23 mostra que a soma das prestações do financiamento no SAC é menor que na Tabela Price.

Uma vez que a planilha é dinâmica, o usuário pode rapidamente fazer diversas simulações pela simples escolha dos valores desejados para D_0, n e i. Também é possível, ao variar k (célula A21) entre 3 e $n - 2$, obter os dados de todas as parcelas de um financiamento. Como resultado para qualquer composição escolhida, será observado que os destaques anteriormente citados, (a), (b), (c), (d), (e) e (f), irão se repetir todas as vezes.

Em resumo, sempre se terá que:

(a) a Prestação no SAC começa maior que na Tabela Price, sendo que a partir de um determinado mês inverte-se tal relação e assim permanece até o final do contrato (o mesmo ocorre com a Amortização);

[6] Editor de planilhas produzido pela Microsoft.

(b) os valores dos Juros no SAC são sempre menores que na Tabela Price (com exceção do mês 1, que são iguais), o mesmo ocorrendo com os Saldos Devedores (com exceção do último mês, que são iguais a zero);

(c) a soma das prestações do financiamento pelo SAC é sempre menor que pela Tabela Price.

Apesar de não ser possível testar a planilha para todos os casos numéricos, pois são infinitos, a coincidência das conclusões em todas as simulações levam à conjectura de que, de fato, elas são verdadeiras e, portanto, possuem demonstração matemática.

Para fortalecer ainda mais essa ideia, a seguir são mostradas imagens de construções gráficas feitas no GeoGebra[7], sendo uma para as Prestações, uma para as Amortizações, uma para as Somas das Amortizações e outra para os Saldos Devedores, sempre comparando o que ocorre nos dois sistemas.

A Figura 2 é de um gráfico que representa um financiamento de R\$ $1.000,00$ em 12 prestações mensais com taxa de juros de 0,87% ao mês. Os pontos $(\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \ldots, \mathrm{P12})$ na reta azul representam o comportamento das prestações na Tabela Price, enquanto que os pontos $(\mathrm{S1}, \mathrm{S2}, \ldots, \mathrm{S12})$ na reta vermelha representam as prestações no SAC. Na Tabela Price as prestações são constantes e no SAC decrescem em Progressão Aritmética. No início, a prestação é maior no SAC mas, a partir de certo momento, passa a ser maior na Tabela Price, até o final do financiamento (Teorema 5 e Observação 2 da Seção 4). Como a figura é dinâmica, pode-se movimentar os valores de i (cursor preto), $\mathrm{D_0}$ (cursor vermelho) e n (cursor verde) para observar as variações que ocorrem. Em particular, quanto mais se aumentar o valor da taxa de juros i, menos tempo irá levar para as prestações ficarem maiores na Tabela Price. As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão do lado esquerdo na Figura 2, representam, respectivamente, em reais, as prestações no SAC e na Tabela Price, sendo que a última linha, em preto, dá a soma dos valores pagos nos dois tipos de financiamentos. Aqui tem-se mais uma novidade: qualquer que seja a variação dada a i, $\mathrm{D_0}$ e n, a soma do que se paga no SAC é sempre menor do que a soma do que se paga na Tabela Price. Tal fato será demonstrado no Teorema 4 da próxima Seção.

[7]Aplicativo de Geometria Dinâmica que pode ser obtido em https://www.geogebra.org/.

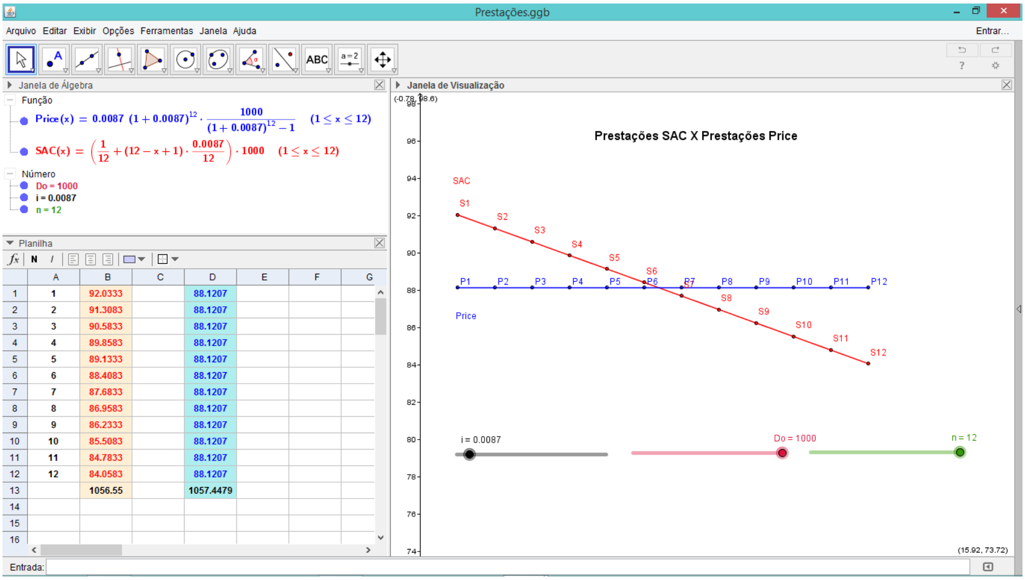

Figura 2: **Prestações SAC X Prestações Tabela Price**
Fonte: Os autores

Para o mesmo financiamento do caso anterior, a Figura 3 mostra o que acontece com as parcelas de amortizações no SAC e na Tabela Price. Aqui, os pontos $(\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \ldots, \mathrm{P12})$ na curva azul representam o comportamento das amortizações na Tabela Price, enquanto que os pontos $(\mathrm{S1}, \mathrm{S2}, \ldots, \mathrm{S12})$ na reta vermelha representam as amortizações no SAC. Na Tabela Price as amortizações vão aumentando exponencialmente (mesmo que o desenho, pela escala, pareça-se com reta) e no SAC são constantes. No início, a parcela de amortização é maior no SAC mas, a partir de certo momento, passa a ser maior na Tabela Price, até o final do financiamento (Teorema 6 e Observação 3 da Seção 4). Como a figura é dinâmica, pode-se movimentar os valores de i (cursor preto), $\mathrm{D_0}$ (cursor vermelho) e n (cursor verde) para observar as variações que ocorrem. Em particular, quanto mais se aumentar o valor da taxa de juros i, mais tempo irá levar para as amortizações ficarem maiores na Tabela Price. As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão no lado esquerdo da Figura 3, representam, respectivamente, em reais, as amortizações no SAC e na Tabela Price, sendo que a última linha, em preto, dá a soma dos valores pagos nos dois tipos de financiamentos, que é justamente o valor financiado (R$ 1.000,00).

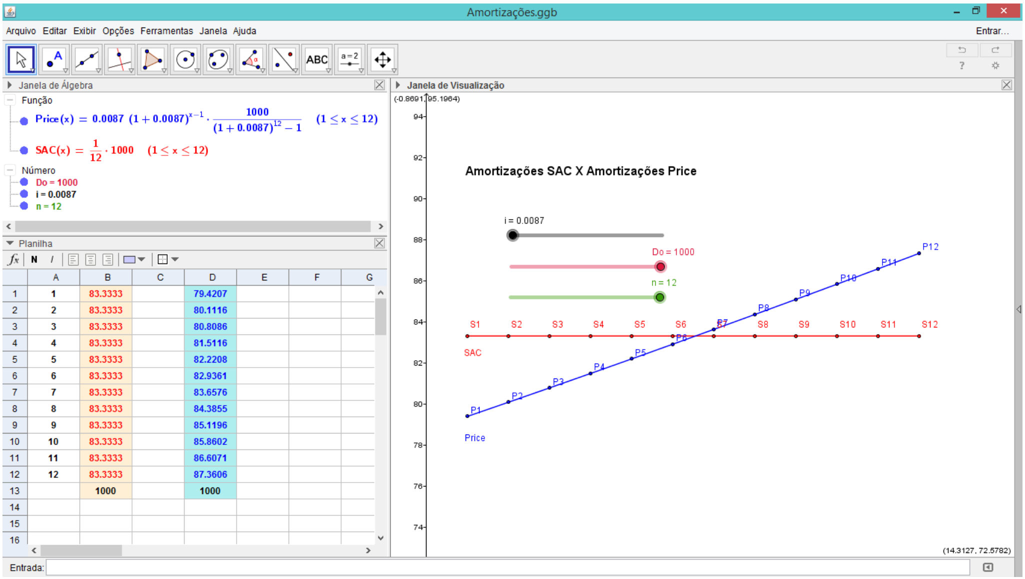

Figura 3: **Amortizações SAC X Amortizações Tabela Price**
Fonte: Os autores

A Figura 4 representa o mesmo financiamento de R$ $1.000,00$ em 12 prestações mensais, porém com uma elevada taxa de juros de 1.000% ao mês. A ideia é mostrar que, na Tabela Price, quanto maior for a taxa de juros, mais as amortizações do saldo devedor irão se concentrar perto do final do financiamento. No caso do SAC, as amortizações do saldo devedor acontecem linearmente ao longo do período de financiamento (Observação 4 da Seção 4). As duas colunas, uma com valores em vermelho (B) e outra com valores em azul (D), que estão no lado esquerdo da Figura 4, representam, respectivamente, em reais, as somas das amortizações no SAC e na Tabela Price. Nesse caso, até a prestação de número 10, as amortizações na Tabela Price são nulas ou quase insignificantes; na prestação 11 há ligeiro aumento, porém somente na última prestação é que acontece a amortização realmente significativa. O gráfico é dinâmico: se agora, ao contrário, a taxa de juros i (cursor preto) for considerada bem próxima de zero, os gráficos do SAC e da Tabela Price tendem a coincidir.

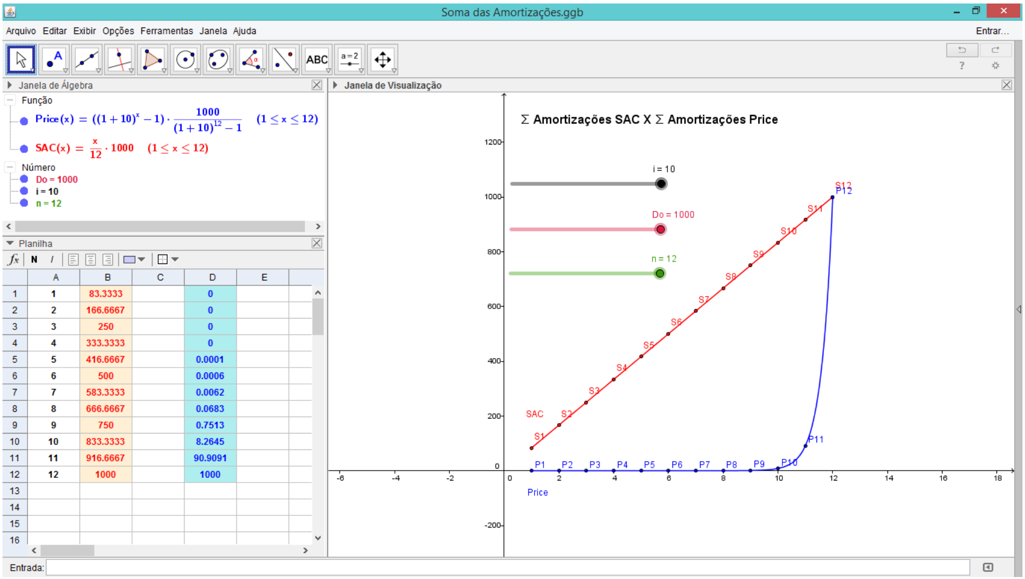

Figura 4: **Soma das Amortizações SAC X Soma das Amortizações Tabela Price**
Fonte: Os autores

Para concluir esta Seção, a Figura 5 refere-se ao mesmo financiamento das figuras 2 e 3, agora mostrando a diferença dos Saldos Devedores entre a Tabela Price e o SAC.

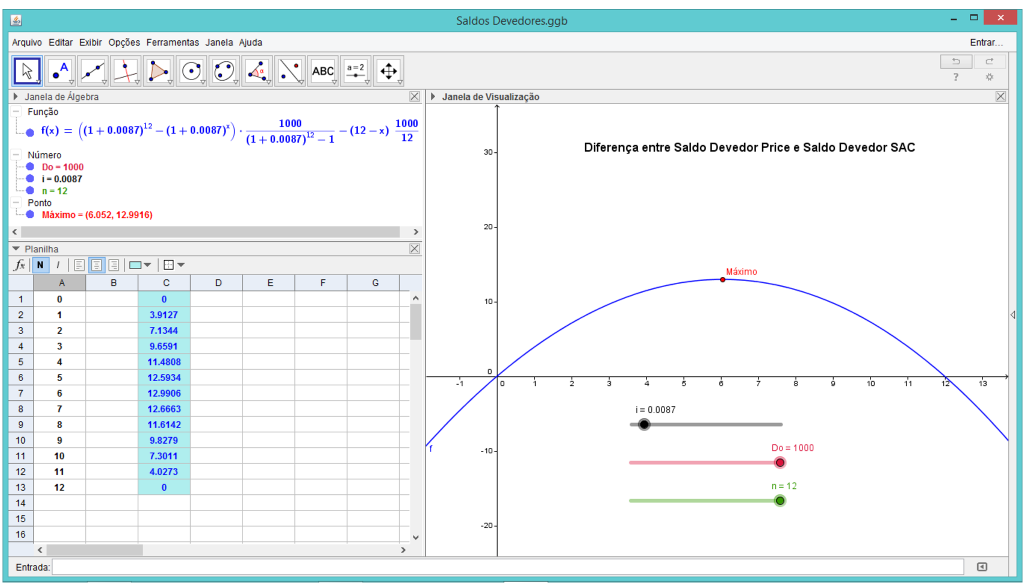

Figura 5: **Diferença entre Saldo Devedor Tabela Price e Saldo Devedor SAC**
Fonte: Os autores

A diferença é nula quando $k = 0$, depois cresce até atingir um valor máximo. Após esse ponto, diminui até zerar no pagamento da última parcela, que neste caso é $k = 12$. A coluna com valores em azul (C), que está no lado esquerdo da Figura 5, mostra, em reais, essas diferenças. O gráfico é dinâmico: pode-se alterar os valores da taxa i (cursor preto), do prazo n (cursor verde) e do financiamento D_0 (cursor vermelho), isoladamente ou em conjunto, que a curva permanece com as mesmas características (para valores maiores dessas variáveis, a diferença fica ainda mais acentuada). Tais fatos observados na função de diferença dos saldos devedores serão demonstrados no Teorema 3 da próxima Seção.

4. Resultados teóricos para SAC e Tabela Price

Nesta Seção serão enunciados e demonstrados resultados que comprovam as diversas conjecturas feitas na Seção 3 a respeito do SAC e da Tabela Price.

Lema 1. *Sejam* i *e* D_0 *números reais positivos,* n *um número natural e a função* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{(1+i)^n - (1+i)^x}{(1+i)^n - 1} D_0 - \frac{n-x}{n} D_0.$$

Então $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (0, n)$.

Demonstração. É fácil ver que f é contínua e infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, pois é a soma de uma função exponencial com uma função afim. Calculando suas derivadas primeira e segunda, obtém-se

$$f'(x) = -\frac{(1+i)^x \ln(1+i)}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{1}{n} D_0$$

e

$$f''(x) = -\frac{(1+i)^x [\ln(1+i)]^2}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f é côncavo para baixo em $\mathbb{R}$. Posto que $f(0) = f(n) = 0$, tem-se que o gráfico de f fica totalmente acima do eixo x no intervalo $(0, n)$, isto é, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, n)$. Além disso, fazendo $f'(x) = 0$, encontra-se como solução única

$$x = \log_{(1+i)} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)^n} \right],$$

que corresponde ao ponto de máximo absoluto de f em $\mathbb{R}$. □

Teorema 3. *Para todo* k *natural,* $0 < k < n$*, o Saldo Devedor no SAC é menor que o Saldo Devedor na Tabela Price.*

Demonstração. Sejam $D_k^{SAC} = (\frac{n-k}{n})D_0$ o saldo devedor no SAC e $D_k^{Price} = (\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}})D_0$ o saldo devedor na Tabela Price, após k pagamentos. É fácil ver que para $k = 0$ e $k = n$, os valores de D_k^{SAC} e D_k^{Price} são iguais a D_0 e 0, respectivamente. Considerando a função $f : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(k) = D_k^{Price} - D_k^{SAC} = \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right) D_0 - (\frac{n-k}{n}) D_0,$$

vê-se que essa é uma restrição da função do Lema 1. Logo, pode-se concluir que $f(k) > 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ou seja,

$$(\frac{n-k}{n})D_0 < \left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}\right)D_0.$$

Portanto,

$$D_k^{SAC} < D_k^{Price}.$$

$\square$

Teorema 4. *Quando* $n > 1$*, a soma dos valores pagos ao longo de um financiamento utilizando o SAC será sempre menor que a soma dos valores pagos utilizando a Tabela Price.*

Demonstração. Primeiro, observa-se que os juros pagos ao longo do financiamento utilizando o SAC serão sempre menores que os pagos utilizando a Tabela Price (salvo quando $k = 1$, que são iguais), pois ambos são calculados da mesma maneira, através da fórmula

$$J_k = iD_{k-1},$$

dependendo do saldo devedor que, pelo Teorema 3, sempre é menor no SAC. Como consequência, a soma dos juros pagos no SAC ao longo do financiamento será menor que a soma dos pagos pela Tabela Price, isto é,

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} J_k^{Price}.$$

Por outro lado, como cada parcela P_k é formada pela adição da amortização com os juros, $P_k = A_k + J_k$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{SAC} + J_k^{SAC})$$

e

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{Price} + J_k^{Price}).$$

Posto que

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^{Price} = D_0,$$

conclui-se que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price}.$$

$\square$

Observação 1. Outra forma de demonstrar esse resultado seria considerar que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = \left[1 + \frac{i}{2}(n+1)\right] D_0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} = \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}} D_0$$

(Teoremas 1 e 2), e mostrar que

$$1 + \frac{i}{2}(n+1) < \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}}$$

para todo n natural maior que 1.

Lema 2. *Sejam* i *um número real positivo e a função* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = ix(1+i)^x - (1+i)[(1+i)^x - 1].$$

Então $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (1, +\infty)$.

Demonstração. É fácil ver que f é contínua e infinitamente derivável em $\mathbb{R}$. Calculando sua derivada primeira, obtém-se

$$f'(x) = i(1+i)^x + ix(1+i)^x \ln(1+i) - (1+i)(1+i)^x \ln(1+i).$$

Para analisar o sinal de f', resolve-se $f'(x) = 0$ e encontra-se como solução única

$$x_0 = \frac{(1+i)\ln(1+i) - i}{i \cdot \ln(1+i)} = 1 + \frac{1}{i} - \frac{1}{\ln(1+i)} < 1,$$

pois $i > \ln(1+i)$. Logo, f' terá sempre o mesmo sinal no intervalo $(x_0, +\infty) \supset [1, +\infty)$. Como

$$f'(1) = i(1+i) + i(1+i)\ln(1+i) - (1+i)(1+i)\ln(1+i),$$

$$f'(1) = i(1+i) + (1+i)\ln(1+i)[i - (1+i)],$$
$$f'(1) = i(1+i) - (1+i)\ln(1+i),$$
$$f'(1) = (1+i)[i - \ln(1+i)] > 0,$$

tem-se que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, +\infty) \supset [1, +\infty)$. Em consequência, f é crescente em $[1, +\infty)$. Como $f(1) = 0$, conclui-se que $f(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. □

A representação gráfica de

$$P_k^{SAC} = \left[\frac{1}{n} + \frac{n-(k-1)}{n} i\right] D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação $-\frac{i}{n}D_0$, enquanto que a de

$$P_k^{Price} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, uma vez que na Tabela Price a prestação é constante.

Teorema 5. *Para* $n = 1$, $P_1^{SAC} = P_1^{Price}$, *e, para todo* $n > 1$, $P_1^{SAC} > P_1^{Price}$ *e* $P_n^{SAC} < P_n^{Price}$.

Demonstração. Fazendo $n = 1$ e $k = 1$ nas fórmulas anteriores, obtém-se

$$P_1^{SAC} = P_1^{Price} = (1 + i)D_0.$$

Para $n > 1$ e $k = 1$, considera-se a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1 + i)^n = 1 + ni + \cdots + i^n > 1 + ni,$$

$$(1 + i)^n - 1 - ni > 0,$$

$$(1 + i)^n - 1 + ni(1 + i)^n - ni > ni(1 + i)^n,$$

$$(1 + ni)[(1 + i)^n - 1] > ni(1 + i)^n,$$

$$\frac{1 + ni}{n} > \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1},$$

$$\left(\frac{1}{n} + i\right) D_0 > \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} D_0.$$

Logo,

$$P_1^{SAC} > P_1^{Price}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, considera-se a função $f : \{2, 3, 4, \ldots\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(n) = in(1 + i)^n - (1 + i)[(1 + i)^n - 1],$$

que é uma restrição da função do Lema 2. Logo, conclui-se que $f(n) > 0$ para todo $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, ou seja,

$$in(1 + i)^n > (1 + i)[(1 + i)^n - 1],$$

$$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} > \frac{1 + i}{n},$$

$$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} D_0 > \frac{1 + i}{n} D_0.$$

Portanto,

$$P_n^{SAC} < P_n^{Price}.$$

□

Observação 2. Quando $n > 2$, pode-se concluir que existe k_0, $1 < k_0 < n$, tal que $P_k^{SAC} < P_k^{Price}$ para todo k, com $k_0 \leq k \leq n$, posto que a sequência $(P_1^{SAC}, P_2^{SAC}, \ldots, P_n^{SAC})$ é uma Progressão Aritmética decrescente de razão $-\frac{i}{n}D_0$, a sequência $(P_1^{Price}, P_2^{Price}, \ldots, P_n^{Price})$ é constante, $P_1^{SAC} > P_1^{Price}$ e $P_n^{SAC} < P_n^{Price}$. Isto significa que sempre haverá um momento no qual a prestação do SAC torna-se menor que a prestação da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento. Pelas características gráficas dos dois tipos de prestações (retas) e sabendo que $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price}$, pode-se concluir que, se n é par, o menor k_0 será menor que (ou igual a) $\frac{n}{2} + 1$, e se n é ímpar, o menor k_0 será menor que (ou igual a) $\frac{n+1}{2}$.

A representação gráfica de

$$A_k^{SAC} = \frac{1}{n} D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, enquanto que a de

$$A_k^{Price} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma curva exponencial.

Teorema 6. *Para* $n = 1$, $A_1^{SAC} = A_1^{Price}$, *e, para todo* $n > 1$, $A_1^{SAC} > A_1^{Price}$ *e* $A_n^{SAC} < A_n^{Price}$.

Demonstração. Fazendo $n = 1$ e $k = 1$ nas fórmulas anteriores, obtém-se

$$A_1^{SAC} = A_1^{Price} = D_0.$$

Para $n > 1$ e $k = 1$, considera-se a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1+i)^n = 1 + ni + \cdots + i^n > 1 + ni,$$

$$(1+i)^n - 1 > ni,$$

$$\frac{1}{n} > \frac{i}{(1+i)^n - 1},$$

$$\frac{1}{n} D_0 > \frac{i}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Logo,

$$A_1^{SAC} > A_1^{Price}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, basta observar que $P_n^{SAC} = (1+i)A_n^{SAC}$ e $P_n^{Price} = (1+i)A_n^{Price}$, e usar que $P_n^{SAC} < P_n^{Price}$. □

Observação 3. Quando $n > 2$, pode-se concluir que existe k_0, $1 < k_0 \leq n$, tal que $A_k^{SAC} < A_k^{Price}$ para todo k, com $k_0 \leq k \leq n$, posto que a sequência $(A_1^{SAC}, A_2^{SAC}, ..., A_n^{SAC})$ é constante, a sequência $(A_1^{Price}, A_2^{Price}, ..., A_n^{Price})$ é uma Progressão Geométrica crescente de razão $1+i$, $A_1^{SAC} > A_1^{Price}$ e $A_n^{SAC} < A_n^{Price}$. Isso significa que sempre haverá um momento no qual a amortização do SAC torna-se menor que a amortização da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento.

Sendo a amortização da Tabela Price no mês k dada por

$$A_k^{Price} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

pode-se encontrar o total da amortização da dívida até o mês m da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = \frac{i}{(1+i)^n-1}D_0 + \frac{i(1+i)}{(1+i)^n-1}D_0 + \frac{i(1+i)^2}{(1+i)^n-1}D_0 + \cdots + \frac{i(1+i)^{m-1}}{(1+i)^n-1}D_0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = \left[1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{m-1}\right]\frac{i}{(1+i)^n-1}D_0,$$

$$\sum A_m^{Price} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = \frac{(1+i)^m-1}{(1+i)^n-1}D_0.$$

Para se saber o quanto da dívida D_0 já foi amortizada quando metade das prestações do financiamento foram quitadas (tal raciocínio aplica-se quando n é par), basta substituir m por n/2. Assim,

$$\sum A_{n/2}^{Price} = \frac{(1+i)^{n/2}-1}{(1+i)^n-1}D_0,$$

$$\sum A_{n/2}^{Price} = \frac{1}{(1+i)^{n/2}+1}D_0 < \frac{1}{2}D_0.$$

Conclui-se que, na Tabela Price, nunca a metade da dívida será amortizada na metade do prazo, ou seja, na segunda metade sempre se amortiza mais do que na primeira metade do financiamento.

Como

$$\lim_{i\to 0}\left(\sum A_{n/2}^{Price}\right) = \frac{D_0}{2},$$

conclui-se que, quanto menor for a taxa de juro, mais próximo da metade do prazo dar-se-á a amortização de metade da dívida. Por outro lado, como

$$\lim_{i\to \infty}\left(\sum A_{n/2}^{Price}\right) = 0,$$

conclui-se que, quanto maior for a taxa de juro, mais próximo do final do prazo se dar-se-á a amortização de metade da dívida.

Para se saber em qual mês m se consegue igualar ou ultrapassar a amortização de metade da dívida, basta isolar m na desigualdade

$$\frac{(1+i)^m-1}{(1+i)^n-1}D_0 \geq \frac{1}{2}D_0,$$

que dá

$$m \geq \log_{(1+i)}\frac{(1+i)^n+1}{2}.$$

Observação 4. A amortização do SAC é dada por

$$A_k^{SAC} = \frac{1}{n}D_0,$$

o que significa que

$$\sum A_m^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{SAC} = \frac{m}{n}D_0.$$

Dessa forma, no SAC sempre se terá amortizado a metade da dívida na metade do prazo. É fácil ver que, neste sistema, a amortização é proporcional ao número de parcelas pagas.

5. Componentes da prestação habitacional na prática

Como já visto, as prestações nos financiamentos imobiliários são os valores pagos mensalmente, com objetivo de liquidar a dívida no prazo estabelecido em contrato. São compostas de uma parcela de amortização e outra de juros. Nos casos práticos, aos valores das prestações calculados nas planilhas, muitas vezes é acrescentada uma taxa administrativa e uma taxa referente a seguros (seguro MIP, que cobre morte e invalidez permanente, e seguro DFI, que faz a cobertura de danos físicos no imóvel).

Dessa forma, as prestações habitacionais cobradas pelas instituições financeiras são formadas por parcelas de amortização e juros, por uma taxa de administração e pelos seguros MIP e DFI. A parcela de administração é fixa e consequentemente não vai mudar o fato de que o somatório dos valores pagos no SAC é menor que na Tabela Price. No caso do seguro DFI, esse é um fator multiplicado pelo valor da garantia atualizada do imóvel, logo será o mesmo valor de parcela tanto no SAC quanto na Tabela Price. Já o seguro MIP é sempre menor no SAC, visto que essa parcela é calculada multiplicando-se um fator– que depende da idade do proponente mais idoso (quando mais de uma pessoa faz parte do contrato)– pelo saldo devedor, que já se sabe ser menor no SAC. Assim sendo, na prática, mesmo a prestação habitacional não sendo composta apenas por uma parcela de juros e outra de amortização, como se considerou anteriormente nos modelos matemáticos, conclui-se também que o somatório total de valores pagos é sempre menor no SAC. Com isso, os resultados da Seção 4 permanecem válidos nos casos práticos.

6. SBPE e PCVA

As duas linhas de crédito mais utilizadas em financiamentos imobiliários no Brasil são o SBPE (Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo), disponibilizado por ampla rede de instituições financeiras, e o PCVA (Programa Casa Verde e Amarela), subsidiado pelo Governo Federal e voltado a famílias com renda mensal de até R$ 7.000,00. Não se objetiva neste texto detalhar as especificidades de cada linha de crédito, porém é importante destacar que, atualmente:

a) no SBPE, o valor máximo da prestação fica limitado a 30% da renda mensal familiar comprovada para financiamentos pelo SAC, e a 25% pela Tabela Price;

b) no SBPE, o prazo máximo de financiamento é 35 anos pelo SAC e 30 anos pela Tabela Price;

c) no PCVA, a prestação máxima é 30% da renda mensal e o prazo máximo de financiamento é 30 anos, tanto para o SAC quanto para a Tabela Price.

Os exemplos a seguir serão referenciados nas considerações da próxima seção.

Exemplo A. Considere-se um cidadão com renda mensal de R$ 8.100,00 que simula um financiamento pelo SBPE de R$ 300.000,00 à taxa de juro mensal de 0,57%. Pelo SAC em 420 meses, a primeira prestação $\mathrm{P}_1^{\mathrm{SAC}}$ seria R$ 2.424,29 (dentro dos 30% da renda) e pela Tabela Price em 360 meses, a prestação inicial $\mathrm{P}_1^{\mathrm{Price}}$ seria R$ 1.963,78 (dentro dos 25% da renda).

Exemplo B. Considere-se um empréstimo pelo PCVA de um cidadão que possui renda mensal de R$ 4.000,00, pelo prazo máximo de 30 anos (360 meses) com taxa de juro mensal de 0,57%. Como a prestação máxima permitida é 30% da renda, ou seja, R$ 1.200,00, o valor máximo possível a ser financiado pela Tabela Price seria R$ 183.320,00, enquanto que no SAC seria R$ 141.547,00.

7. Considerações finais

Após toda discussão feita nas seções anteriores, é possível tirar conclusões que podem orientar com segurança o cidadão que for realizar um financiamento habitacional, na escolha da melhor opção dentro das suas condições de momento. De forma objetiva, tem-se:

1. Como já visto, para que a instituição que irá financiar o imóvel aprove o empréstimo, a primeira prestação do financiamento não pode comprometer mais do que X% do salário bruto do(s) proponente(s). Como $P_1^{\text{Price}} < P_1^{\text{SAC}}$ (Teorema 5), pode ocorrer, dependendo do valor a ser financiado, mesmo considerando contrato com prazo máximo permitido[8], de que os X% da renda bruta sejam um valor entre P_1^{Price} e P_1^{SAC}. Nesse caso não há opção, e deve-se obrigatoriamente contratar pela Tabela Price.

2. Em qualquer momento do contrato, desde que a renda bruta do(s) proponente(s) seja suficiente, o sistema bancário permite trocar de Price para SAC e vice-versa, de acordo com o interesse do(s) contratante(s). Então, na situação do item anterior, caso em algum momento de vigência do contrato a prestação simulada no SAC ficasse igual ou inferior aos X% do salário bruto, o mesmo poderia ser mudado de Tabela Price para SAC.

3. Sendo a amortização no SAC proporcional ao número de parcelas pagas, $\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{\text{SAC}} = \frac{m}{n} D_0$ (Observação 4), esse sistema permite ao cidadão melhor controle sobre o que foi pago e o que resta pagar. Ainda, a quitação antecipada da dívida, em qualquer época, sempre será menor no SAC. Não é raro pessoas com contrato pela Tabela Price ficarem surpresas ao saberem que, mesmo tendo pagado metade das prestações, o Saldo Devedor ainda é maior que 50%, uma vez que o Saldo Devedor no Price é sempre maior que no SAC (Teorema 3).

4. Uma forte razão para se optar pelo SAC é o fato de que a soma dos valores pagos ao longo do financiamento no SAC é sempre menor que na Tabela Price (Teorema 4). Na Figura 1 do início da Seção 3, as células E23 e H23 da planilha Excel mostram as somas dos valores pagos pelo SAC e pela Tabela Price, respectivamente. Para o financiamento de R$ 122.400,00 em 360 meses do exemplo, paga-se pelo SAC aproximadamente R$ 40.000,00 a menos. Não se pode negar que esse é um valor significativo. Ressalte-se, porém, que o fato de $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}}$ não significa que será sempre vantajoso, financeiramente, optar pelo SAC. Em teoria, seria possível ao contratante que optou pela Tabela Price investir a diferença dos valores das prestações iniciais, $P_k^{\text{SAC}} - P_k^{\text{Price}}$, em aplicações com excelentes taxas de retorno, podendo, com esse procedimento, compensar a diferença $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{Price}} - \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{\text{SAC}}$. Por outro lado, também é certo que, a partir do momento que a prestação do SAC fica menor que a da Tabela Price (Observação 2), poder-se-ia fazer o mesmo, agora com as diferenças $P_k^{\text{Price}} - P_k^{\text{SAC}}$. No mundo real,porém, é razoável acreditar que seria difícil, para a quase totalidade das pessoas, realizar essas aplicações altamente rentáveis, de forma que, mesmo teoricamente possível, na prática seria muito improvável.

5. O Exemplo A da seção anterior mostra que é preciso precaução antes de definir qual seria o sistema mais adequado. Para o mesmo valor financiado e mesma taxa de juro, em 35 anos pelo SAC e em 30 anos pela Tabela Price, com $P_1^{\text{SAC}} - P_1^{\text{Price}} = \text{R\$ } 460,51$, o cidadão poderia concluir rapidamente que a Tabela Price seria mais vantajosa. Porém, ainda aqui, tem-se que a soma de todas as prestações a serem pagas no SAC seria R$ 659.955,00, enquanto que na Tabela Price seria R$ 706.959,20, o que dá uma diferença de R$ 47.004,20. Assim, vê-se que comparar apenas alguns dados do financiamento, sem levar em conta a metodologia que é usada para cada um dos sistemas

[8] Em todo o trabalho, os resultados teóricos foram obtidos considerando financiamentos de mesmo prazo n para os dois sistemas de amortização.

de amortização pode, eventualmente, levar a uma escolha precipitada. O ideal é conhecer as regras do contrato antes de assinar, mesmo que depois disso a decisão seja a mesma (no caso, pelo Price).

6. Para quem necessita maximizar o valor a ser financiado para poder adquirir o imóvel desejado, a melhor escolha seria a Tabela Price. O Exemplo B da seção anterior evidencia isso, posto que a diferença de R$ 41.773,00 entre o que se poderia financiar pela Tabela Price (R$ 183.320,00) e pelo SAC (R$ 141.547,00), com o mesmo prazo e mesma prestação inicial, permitiria a compra de um imóvel de padrão mais elevado. Note-se que, neste caso, $\mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{Price}} > \mathrm{P}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{SAC}}$ para todo k, $1 < \mathrm{k} \leq 360$.

7. Quando se leva em consideração outros aspectos, diferentes do somatório de valores pagos ou do saldo devedor, pode ser mais adequado financiar na Tabela Price. Por exemplo, para profissionais mais jovens que possuam boas expectativas de aumento salarial, sem condições de assumir prestações maiores no início do contrato, a Tabela Price pode ser mais indicada, pois nesse sistema as prestações iniciais são menores (Teorema 5). Ainda existe o caso das pessoas que possuem valores consideráveis a serem recebidos em curto prazo e precisam, enquanto isto não acontece, de uma prestação menor. Um exemplo dessa situação são os compradores que estão vendendo o imóvel onde residiam anteriormente. Por outro lado, para quem pode assumir uma prestação maior no início do financiamento e tem como perspectiva o aumento das despesas no médio e longo prazos – como filhos, mensalidades escolares e planos de saúde – o SAC deve ser a opção considerada pois, como já visto, as prestações começam maiores e vão decrescendo ao longo do tempo.

Referências

[1] ABRAINC. *Estudo Técnico Dedicado à Atualização das Necessidades Habitacionais no Brasil – 2004-2030*, ECCONIT, novembro, 2020. Disponível em: https://www.abrainc.org.br/estudos/2020/12/21/estudo-tecnico-dedicado-a-atualizacao-das-necessidades-habitacionais-no-brasil-2004-2030/. Acesso em: 30 de maio de 2021.

[2] Ferreira, D. B. "SAC ou Price?", RPM - *Revista do Professor de Matemática*, nº 85, p. 42-45, SBM, Rio de Janeiro, 2014.

[3] Santos, K. M. B. *A Matemática do Financiamento Habitacional*. Dissertação, Mestrado Profissional em Rede Nacional - Profmat, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, 2015.

Keila Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<keilambs@gmail.com.br>

Rubens Ortega
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<rubensortega@utfpr.edu.br>

Recebido: 12/04/2021
Publicado: 30/06/2021