PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.3, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo936

Conheça os quadriláteros iso-ortodiagonais

Isabelle Garcia da Silva[1] Rogério César dos Santos

Resumo

Neste artigo, definimos os quadriláteros iso-ortodiagonais e demonstramos uma interessante propriedade que eles possuem. Para a demonstração da propriedade, utilizamos os conteúdos de Geometria Euclidiana Clássica e Números Complexos. Para a construção das figuras, utilizamos o renomado *software* GeoGebra. Mostramos também que o referido quadrilátero iso-ortodiagonal aparece no notável Teorema de Van Aubel. Consideramos que o assunto apresentado aqui é um tema rico para ser explorado no Ensino Médio, visto agregar belamente os conteúdos de Geometria Plana e Números Complexos.

Palavras-chave: Geometria Plana; Teorema de Van Aubel; Quadrilátero iso-ortodiagonal.

Abstract

In this article, we define the iso-orthodiagonals quadrilaterals and demonstrate an interesting propriety they have. For the proof of the propriety, we use Classical Euclidean Geometry and Complex Numbers contents. We utilize the well known software GeoGebra to construct the figures. We also show that the iso-orthodiagonal quadrilateral presented shows up on the remarkable Van Aubel's Theorem. We consider the subject introduced here as a rich theme to be explored in High School, since it beautifully aggregates Plane Geometry and Complex Numbers contents.

Keywords: Plane Geometry; Van Aubel's Theorem; Iso-orthodiagonal quadrilateral.

1. Introdução

Neste artigo falaremos dos quadriláteros iso-ortodiagonais. Veremos uma interessante propriedade do mesmo e onde eles podem aparecer. São facilmente manipuláveis em *softwares* geométricos e por isso podem ser explorados pelo professor junto aos alunos, tanto no ensino fundamental quanto no médio.

Um quadrilátero é chamado de iso-ortodiagonal se possui diagonais congruentes e perpendiculares, como ilustra a Figura 1, em que $AC = BD$ e $AC \perp BD$.

[1]Bolsista de Iniciação Científica do CNPq

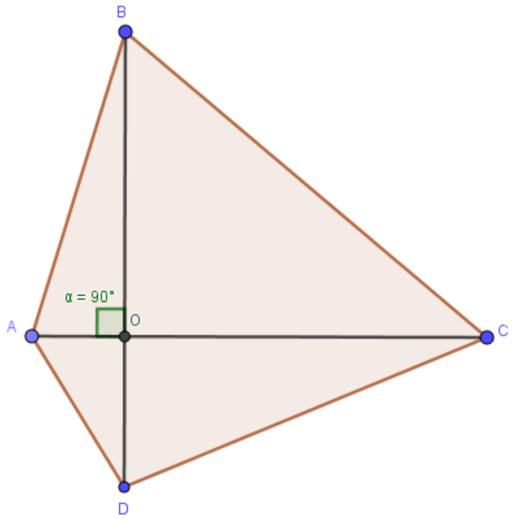

Figura 1: Um quadrilátero iso-ortodiagonal convexo.

Se O é o ponto de interseção das duas diagonais, então uma propriedade imediata desse quadrilátero, por Pitágoras, é que:

$$\mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2 + \mathrm{CO}^2 + \mathrm{DO}^2 = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2}{2}.$$

Isto é, a soma dos quadrados das distâncias de seus vértices ao ponto O é igual à semissoma dos quadrados dos seus lados.

Porém, estamos aqui para vislumbrar uma outra propriedade desse tipo de quadrilátero, tanto no caso convexo quanto no não convexo.

2. Uma interessante propriedade

A propriedade que iremos provar é a seguinte: *os pontos médios dos lados de um quadrilátero iso-ortodiagonal formam um quadrado.*

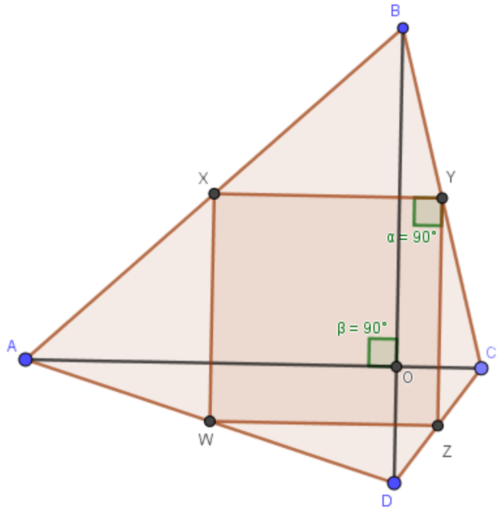

Figura 2: XYZW é um quadrado.

Para a prova do caso convexo, vamos nos basear na Geometria Euclidiana clássica, e a demonstração é bem simples. Para o caso mais geral, convexo ou não convexo, faremos uso das propriedades dos números complexos.

Demonstração. □

Caso convexo.

Tome X, Y, Z e W, os pontos médios de, respectivamente, AB, BC, CD e DA, da Figura 2.

Pelo Teorema da Base Média nos triângulos ABC e ACD, temos que XY e WZ são iguais a $\frac{AC}{2}$. Já nos triângulos BCD e ABD, temos que YZ e XW são iguais a $\frac{BD}{2}$. Porém, $\frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$. Logo, os lados de XYZW são todos congruentes e medem metade do valor das diagonais do quadrilátero ABCD.

Assim, XYZW é um losango (e, em particular, um paralelogramo). Resta-nos provar que seus ângulos internos medem 90°.
Considere F e G os pontos de interseção de AC com YZ e de BD com WZ, respectivamente, como podemos ver na Figura 3. Pelo fato de WZ ser paralelo a AC, e de YZ ser paralelo a BD, concluímos que OFZG é um paralelogramo. Assim, possui ângulos opostos congruentes.

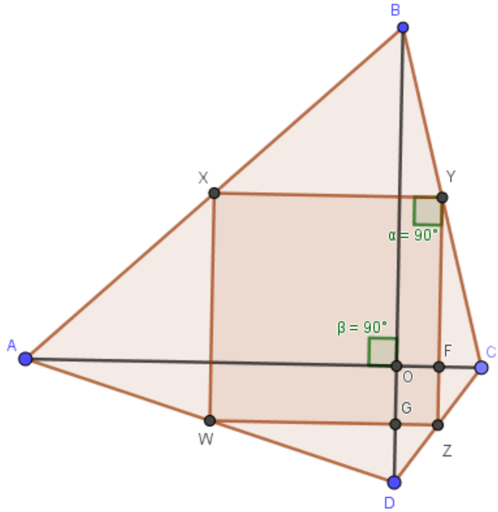

Figura 3: OFZG é um paralelogramo.

Como $F\widehat{O}G = 90^\circ$, então $Y\widehat{Z}W = F\widehat{Z}G = 90^\circ$. Realizando a mesma análise para os demais ângulos internos de XYZW, concluímos que XYZW é um quadrado, e a prova termina.

Caso geral

Observe o leitor que consideramos, na Figura 3, se ABCD convexo. Ora, o resultado vale, mesmo quando o quadrilátero não é convexo ou quando possui autointerseção. Porém, nessa situação, o ponto F interseção de AC com YZ, por exemplo, pode não existir, e fica comprometida a visualização do paralelogramo FZGO, como mostra a Figura 4.

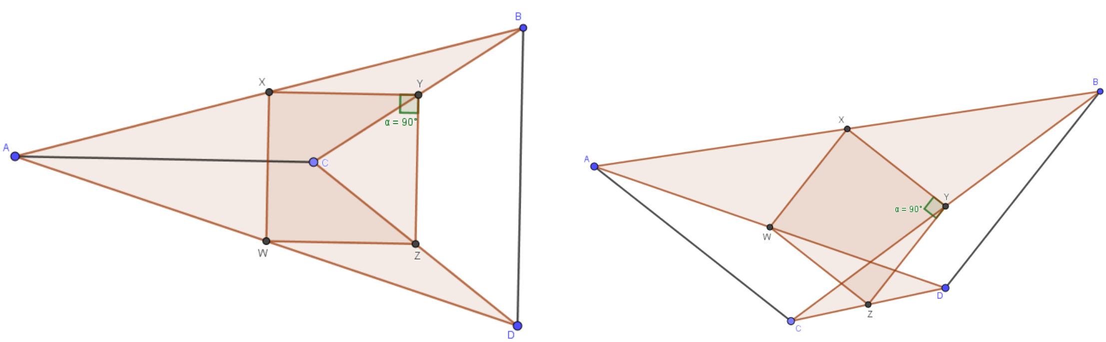

Figura 4: Dois quadriláteros ABCD iso-ortodiagonais não convexos, o da direita com autointerseção.

Logo, faz-se necessária uma prova para o caso geral em que ABCD pode ou não ser convexo. Para tanto, vamos recorrer aos Números Complexos, ferramenta sempre aliada à Geometria Euclidiana, como podemos ver, por exemplo, em [1].

Insiramos um sistema de Eixos Cartesianos no quadrilátero da esquerda (poderia ser também no da direita) da Figura 4, com origem em algum ponto arbitrário fixo, do Plano. Assim, o vértice A está agora localizado no Plano Cartesiano: $A = (a_1, a_2)$, sendo a_1 e a_2 números reais.

Dados dois pontos quaisquer do plano $E = (e_1, e_2)$ e $F = (f_1, f_2)$, lembremos que o vetor $\overrightarrow{EF}$ é *equivalente* ao vetor $\overrightarrow{O(F-E)}$, cujas extremidades são a origem $O = (0,0)$ e o ponto diferença $F - E$. Isto é, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{O(F-E)}$ possuem mesmo comprimento e mesmo ângulo com o eixo x das abscissas, pois:

$$EF = \sqrt{(f_1 - e_1)^2 + (f_2 - e_2)^2} = O(F - E),$$

e $\frac{f_2 - e_2}{f_1 - e_1}$ é a tangente do ângulo que ambos os vetores $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{O(F-E)}$ fazem com o eixo das abscissas.

Assim, voltando à Figura 4, a rotação do vetor $\overrightarrow{AC}$ em 90° no sentido anti-horário, em torno de A, resulta em um vetor equivalente ao vetor $\overrightarrow{DB}$, pois $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$ são ortogonais e congruentes. O mesmo ocorrendo, portanto, com seus equivalentes localizados na origem, isto é, a rotação do vetor $\overrightarrow{O(C-A)}$, em torno de O, resultará em um equivalente ao vetor $\overrightarrow{O(B-D)}$. Como esses estão localizados na origem, serão na verdade coincidentes.

Chamando de $a = a_1 + a_2 i$ o número complexo associado ao ponto $A = (a_1, a_2)$, de $b = b_1 + b_2 i$ o número complexo associado ao ponto $B = (b_1, b_2)$, de $c = c_1 + c_2 i$ ao ponto $C = (c_1, c_2)$ e de $d = d_1 + d_2 i$ ao ponto $D = (d_1, d_2)$, concluímos do parágrafo anterior que:

$$i(c - a) = b - d, \tag{1}$$

pois sabemos que multiplicar um número complexo por i implica rotacioná-lo 90° no sentido anti-horário, mantendo o módulo. Guardemos essa equação para o que vem a seguir.

Tomaremos agora os números complexos $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{b+c}{2}$, $z = \frac{c+d}{2}$ e $w = \frac{a+d}{2}$, associados aos vértices do quadrilátero XYZW. Para os segmentos WZ e WX, temos, pela equação 1 acima, que:

$$\begin{gathered} i(z - w) - (x - w) = \\ i\left(\frac{c+d}{2} - \frac{a+d}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+d}{2}\right) = \\ \frac{1}{2}[i(c-a) - (b-d)] = 0, \end{gathered}$$

isto é, $i(z - w) = x - w$, o que significa que o vetor resultante da rotação de $\overrightarrow{O(Z-W)}$ em 90° no sentido anti-horário é o vetor $\overrightarrow{O(X-W)}$. Assim, a rotação do vetor $\overrightarrow{WZ}$ em 90° no sentido anti-horário em torno do ponto W resulta em um equivalente a $\overrightarrow{WX}$. Em verdade, serão coincidentes por terem origem no ponto comum W. Tal fato implica duas coisas: que $WZ = WX$ e também que $WZ \perp WX$.

Fazendo o mesmo para todos os demais pares de lados adjacentes de XYZW, concluímos que se trata de um quadrado.

A recíproca desse resultado também é verdadeira, isto é, se um quadrilátero ABCD possui pontos médios de seus lados denotados por $X = \frac{A+B}{2}$, $Y = \frac{B+C}{2}$, $Z = \frac{C+D}{2}$ e $W = \frac{D+A}{2}$, e se XYZW é um quadrado, então o quadrilátero ABCD é iso-ortodiagonal, isto é, suas diagonais AC e BD são congruentes e perpendiculares. A demonstração é feita invertendo-se os argumentos da prova direta: considere os números complexos a, b, c, d, x, y, z e w definidos como nos parágrafos anteriores. Ora, por hipótese, XYZW é um quadrado, logo, $i(z-w) = x-w$. Substituindo, temos $i\left(\frac{c+d}{2} - \frac{d+a}{2}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{d+a}{2}$. Simplificando, temos: $i(c-a) = b-d$, o que implica que as diagonais AC e BD são ortogonais e congruentes, isto é, ABCD é iso-ortodiagonal, como queríamos provar.

Observação. E se ABCD não for iso-orto-diagonal, se for um quadrilátero qualquer? O que se poderia dizer do quadrilátero XYZW cujos vértices são os pontos médios de ABCD? Nesse caso, apenas se garante que XYZW é um paralelogramo. O argumento para nos convencermos disso é o mesmo que utilizamos no início da prova de nossa propriedade, isto é, o Teorema da Base Média.

3. Onde aparece

Eis uma aparição do quadrilátero iso-ortodiagonal. O notável Teorema de Van Aubel [2] diz que, dado um quadrilátero ABCD sobre cujos lados são construídos quadrados externamente, então, os segmentos MO e NP que unem os centros M, N, O e P dos quadrados opostos são ortogonais e congruentes (Figura 5). Ou seja, MNOP é um quadrilátero iso-ortodiagonal.

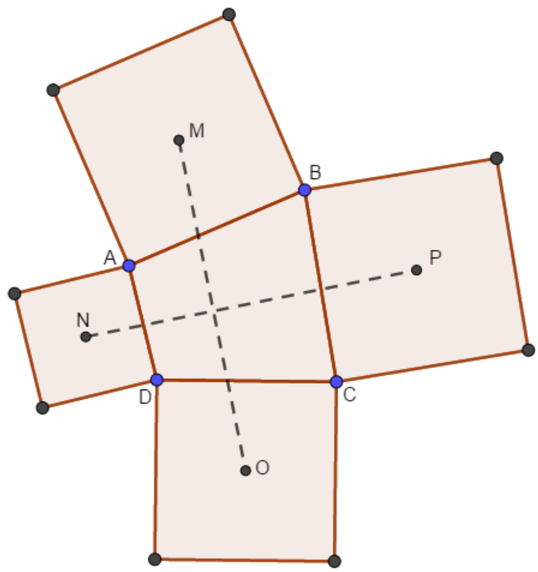

Figura 5: Teorema de Van Aubel: MNOP é iso-ortodiagonal.

A prova também pode ser realizada por meio das propriedades dos números complexos e pode ser encontrada na referência citada, para deleite do leitor.

E então, cara(o) professora(or), que tal instigar os alunos a explorarem os quadriláteros iso-ortodiagonais com o GeoGebra, em sala?

Referências

[1] Neves, Robson Coelho Neves. Aplicações de Números Complexos em Geometria. *Dissertação*. Impa. Profmat. Rio de Janeiro. Fevereiro de 2014.

[2] NISHIYAMA, Y. Beautiful Theorems of Geometry as Van Aubel's Theorem. Department of Business Information. Faculty of Information Management. Osaka University of Economics. Osumi Higashiyodogawa. Osaka. Japan, 2010.

[3] Villiers , Michael de. "Dual Generalizations of Van Aubel's theorem." *The Mathematical Gazette*. Copyright Mathematical Association. Nov. 405-412. 1998. University of Durban-Westville, South Africa

Isabelle Garcia da Silva
Faculdade UnB Planaltina
<isabellegarciasilva1@gmail.com>

Rogério César dos Santos
Faculdade UnB Planaltina
<professorrogeriocesar@gmail.com>

Recebido: 22/04/2021
Publicado: 23/08/2021