PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.1, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo97

Enquadrando Pitágoras: uma experiência de ensino com alunos do 8°ano do Fundamental

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal   Fernanda Aparecida Ferreira

Resumo

Neste artigo, recorte de uma dissertação produzida no âmbito do Profmat, apresentamos o relato de uma experiência de ensino realizada remotamente, que teve por objetivo trabalhar o Teorema de Pitágoras por meio de uma atividade de caráter investigativo e exploratório. Toda a concepção, *design* e dinâmica de aplicação da atividade é retratada, bem como uma análise descritiva e interpretativa sobre os dados coletados com sua realização. Com o auxílio de recursos computacionais, buscamos promover explorações investigativas para que os alunos criassem conjecturas e formulassem argumentos para "provar" o teorema. Vários alunos produziram conjecturas viáveis e alguns forneceram boas justificativas para suas conclusões. Esperamos que a experiência retratada possa servir de referência para professores que tenham interesse em trabalhar as demonstrações matemáticas de maneira investigativa.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Demonstração; Atividade Exploratória; Argumentação Matemática.

Abstract

In this article, an excerpt from a dissertation produced in the PROFMAT, we present the report of a teaching experience carried out remotely that aimed to work on the Pythagorean Theorem through an investigative and exploratory activity. The whole conception, design and application dynamics of the activity is portrayed, as well as a descriptive and interpretative analysis of the data collected with its realization. With the aid of computational resources, we seek to promote investigative explorations so that students create conjectures and formulate arguments to "prove" the theorem. Several students produced viable conjectures and some provided good justifications for their conclusions. We hope that the experience portrayed can serve as a reference for teachers who are interested in working on mathematical proofs in an investigative way.

Keywords: Pythagorean Theorem; Proof; Exploratory Activity; Mathematical Argumentation.

1. Introdução

No cenário de nossa experiência profissional, percebemos não ser excepcional que alguns professores de matemática terminem o ano letivo de maneira que parte da proposta curricular tenha sido desconsiderada, seja por motivo da própria estruturação da grade ou da formação do professor, entre outros. Observamos, em geral, que a parte referente à Geometria é a mais afetada.

Essa percepção levou-nos a refletir um pouco sobre o ensino de Geometria na educação básica, sendo que parte das reflexões pode ser encontrada em nossa dissertação de Mestrado, produzida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (Profmat – Cefet/MG) e no artigo intitulado "Demonstrações Geométricas por meio de Experimentações", apresentado no XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XXIII Ebrapem).

Dentre essas reflexões, é sabido que o ensino de Geometria na escola básica tem um papel fundamental no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, porém, muitas das vezes, ele é deixado de lado em favor do ensino da Álgebra. Para Gazire (2000), o movimento da Matemática Moderna teve sua parcela de contribuição no caos que se instaurou no ensino da Geometria, "uma vez que a proposta de algebrizar a Geometria não se manteve, criando uma lacuna, principalmente, nas práticas pedagógicas" (VIDIGAL, 2019, p. 1).

Ademais, geralmente quando ofertada, a geometria escolar, baseada na Geometria Euclidiana, é apresentada de maneira sucinta e superficial, com foco em processos lógico-dedutivos formais que, normalmente, levam à resolução de problemas algébricos. Por outro lado, várias pesquisas revelam a importância de promover a descoberta "matemática" em sala de aula por outros meios criativos, nos quais os alunos possam inferir, conjecturar, validar e refutar, abstrair e generalizar proposições. Dessa forma, "permitir que os alunos vivenciem um momento criativo é fundamental no ensino-aprendizagem, uma vez que aproxima o estudante da verdadeira criação da Matemática enquanto ciência" (VIDIGAL, 2019, p. 2). Nessa perspectiva, contribuímos para despertar nos alunos um espírito questionador, crítico e investigativo.

Ainda, levando em consideração a importância do ensino de Geometria na educação básica, pressupomos que as ferramentas tecnológicas possam se mostrar grandes aliadas ao processo de ensino e aprendizagem, cuja finalidade seja promover experimentações no ambiente escolar. Destacamos o potencial para se trabalhar com práticas pedagógicas diferenciadas e criativas, permitindo que o aluno interaja com os conceitos matemáticos, propiciando, dessa maneira, a descoberta, a inferência de resultados, o levantamento e teste de hipóteses, bem como a verificação da veracidade de determinada proposição.

Diante do exposto, apresentamos neste artigo uma experiência de ensino com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental que teve por objetivo principal trabalhar uma relação geométrica – o Teorema de Pitágoras – por meio de uma atividade de exploração de propriedades geométricas com uso de recurso tecnológico. A proposta da atividade foi pensada de tal forma que fosse possível aproximar os alunos da demonstração matemática sem uma preocupação com o rigor formal e lógico, mas, sim, permitindo que os alunos aguçassem a criatividade e a vontade em saber a natureza dos conhecimentos que lhes são ensinados e produzissem seus próprios argumentos.

Na seção seguinte, elucidamos em linhas gerais o referencial teórico utilizado na concepção da atividade, bem como para sua elaboração.

2. Referencial Teórico

Demonstrações matemáticas na Geometria

Na geometria demonstrativa, provar que algo verdadeiro é feito por meio da demonstração. Então, podemos nos perguntar: o que é uma demonstração?

Essa resposta, longe de ser um consenso entre matemáticos e educadores matemáticos, suscitou e ainda suscita vários debates sobre o seu papel na Matemática e no seu ensino. Uma boa fonte de informações sobre concepções de demonstração pode ser encontrada na tese de doutorado de Ferreira (2016), na qual a autora apresenta um panorama de pesquisas internacionais acerca das demonstrações matemáticas no contexto da Educação Matemática.

Considerando seu significado para a Matemática, uma demonstração pode ser vista como um processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, comprova-se a veracidade de uma afirmação por meio de uma sequência lógica válida (GARBI, 2010).

Em uma demonstração matemática, buscamos argumentos para provar alguma proposição com base na experiência, nas observações, nos fatos e nas proposições estabelecidas que já foram comprovadas. Com base em resultados assim obtidos, chega-se a uma conclusão sobre a validade, ou falsidade, da proposição que está sendo provada. É importante destacar que essas experiências, observações e fatos ocorrem internamente no campo da própria Matemática enquanto ciência, e não na evidência física, como ocorre com as ciências empíricas.

Nesse sentido, podemos afirmar que uma demonstração é um tipo de discurso retórico que visa convencer alguém (no caso, os matemáticos) de que uma afirmação matemática é verdadeira ou válida. Nesse tipo de "discurso retórico" para provar que alguma afirmação nova é verdadeira, é necessário relacioná-la com uma afirmação antiga que já foi demonstrada anteriormente.

Mas por que precisamos de uma demonstração?

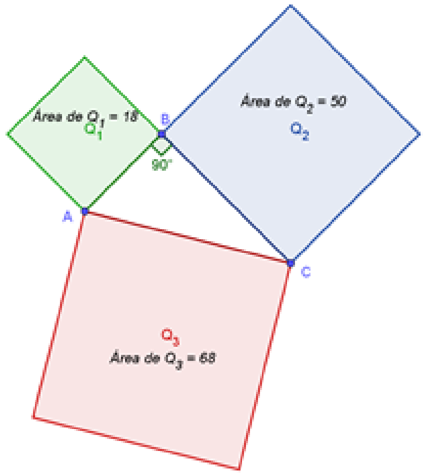
Em Matemática, são as demonstrações que fazem esse papel de validação. Qualquer afirmação que não tenha uma prova matemática não tem valor e, portanto, não será aceita como válida. Uma vez demonstrada a afirmação, ela é válida em qualquer lugar sob suas determinadas hipóteses, não sendo possível contradizê-la (caso os argumentos lógicos estiverem corretos). Sendo assim, outros poderão valer-se de tal afirmação em seus trabalhos sem a necessidade de demonstrá-la novamente.

Na Geometria Euclidiana, as demonstrações alinham os fatos geométricos em um sistema de conhecimento científico que garante as conexões existentes entre um último teorema demonstrado (e teoremas comprovados anteriormente) aos axiomas considerados como fundamentais no desenvolvimento de toda essa Geometria.

A necessidade de uma demonstração em Geometria Euclidiana está atrelada ao princípio de que determinada proposição possa ser utilizada para estabelecer propriedades especiais de determinados objetos geométricos. Utilizando-se da dedução lógica, ao realizarmos uma inferência correta e baseada em proposições iniciais corretas, podemos ter certeza de que a proposição que provamos é válida. Dessa forma, por exemplo, temos certeza de que o Teorema de Pitágoras (propriedade especial) é válido para qualquer triângulo retângulo (objeto geométrico).

Segundo Boyer (2019), matemáticos na Idade Média representavam as proposições geométricas com desenhos expressivos, mas não demonstravam tais proposições usando argumentos lógicos. Dessa maneira, as figuras tinham um papel importante para a "demonstração" de propriedades e relações que ainda não podiam ser comprovadas por processos lógicos dedutivos. Na Figura 1, a seguir, temos um exemplo de uma "prova" para o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborado pelos autores(2020)

Podemos observar a Figura 1, de forma que não ponderemos sobre seu significado geométrico e cheguemos à mesma conclusão de que a soma das áreas dos quadrados Q1 e Q2 representam a mesma área do quadrado Q3.

Com esse exemplo, queremos destacar o papel desempenhado pela figura na demonstração de um teorema geométrico. Salientamos que a utilização de um *software* de geometria dinâmica ampliaria o papel desempenhado por uma figura na medida em que é possível manipular e testar novas conjecturas, de uma maneira, como o próprio nome diz, dinâmica. A Figura 1 é apenas um exemplo, apenas um caso específico de triângulo retângulo. É claro que poderíamos nos perguntar: Seria o teorema válido então para todos os triângulos desse tipo? Nesse sentido, a demonstração formal tem fator determinante para nos convencermos de que, independentemente do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras será sempre válido.

Demonstrações no contexto da escola básica

As demonstrações matemáticas como meio de validar o conhecimento podem e devem ser incorporadas ao ensino de acordo com cada nível de escolaridade. Balacheff (1987) faz uma distinção entre "demonstração" e "prova" em termos de validação. Para o autor, podemos dizer que a Matemática desenvolve o primeiro, enquanto os professores de matemática lidam apenas com o segundo.

Uma prova para o ensino básico não é dar uma explicação explicitamente rigorosa para um fato matemático utilizando uma estrutura organizada com base em inferência de argumentos dedutivos. A prova em uma sala de aula é baseada em argumentos que têm como principal função convencer os alunos da validade de determinada proposição. Demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo (FOSSA, 2009).

No que tange ao ensino de Geometria, observamos que muitas das dificuldades conceituais e cognitivas são, em parte, causadas pela falta de compreensão das demonstrações que constituem a essência da Geometria Euclidiana. A abordagem axiomática da Geometria Euclidiana é uma forma natural de decifrar as relações entre diferentes fatos e exibir a sua lógica estrutural; porém, em uma abordagem construtiva do pensamento geométrico, guiado pela intuição, uma verdadeira fonte da dinâmica matemática pode trazer elementos que tornam o conhecimento geométrico comparável à música e à arte (COURANT; ROBBINS, 2000).

Para isso, julgamos que, em níveis fundamentais de ensino é preciso aceitar que uma prova pode só explicar e convencer, independentemente dos argumentos utilizados. Em ambientes formais de ensino, as provas matemáticas que ali ocorrem deveriam ser exploradas como um meio para se chegar às demonstrações formais da Matemática (ou quase). Dessa forma, muito da Geometria Euclidiana, área da Matemática na qual as demonstrações são comuns, teria mais sentido para os alunos e contribuiria para o desenvolvimento de um raciocínio que transitaria para a evolução de uma prova em uma demonstração.

De acordo com Ferreira (2016), há uma necessidade de discutir o ensino das provas matemáticas desde a educação básica, levando em conta as diferentes funções que uma demonstração exerce. "A visão tradicional de que a única função da prova é a verificação de afirmações matemáticas parece ignorar o real papel da experimentação na Matemática" (FERREIRA, 2016, p. 309). A referência primária a respeito da função "verificação" da prova em contexto escolar, em muitas pesquisas apoiam-se nas ideias de Villiers (2001).

De acordo com Villiers, a demonstração tem as seguintes funcionalidades, as quais podem ser resumidas em

> *(i) verificação (diz respeito à verdade de uma afirmação); (ii) explicação (fornece explicações do porquê certa afirmação ser verdadeira); (iii) sistematização (organiza os resultados/argumentos em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos primários e teoremas); (iv) descoberta (evidencia a descoberta ou invenção de novos resultados); (v) comunicação (transmite o conhecimento produzido); (vi) desafio intelectual (reflete a gratificação pessoal, resultante da construção de uma demonstração)* (FERREIRA, 2016, p. 310).

Para Ferreira (2016), as pesquisas que trazem alternativas para o ensino das provas na educação básica afirmam que um trabalho significativo deve levar em consideração as funções descritas acima, não apenas como características da prova matemática, mas também como funções das provas que emergem em situação de ensino, "promovendo, sempre que possível, uma relação entre essas formas de justificação, e a evolução das ações de verificação empírica para a exigência de uma prova rigorosa"(FERREIRA, 2016, p. 310).

Destacamos que uma abordagem mais experimental para o ensino das demonstrações acaba por colocar em evidência as funções descritas por Villiers, sejam na elaboração de conjecturas, na verificação ou refutação de argumentos, na busca de alternativas para entender determinadas percepções e, até mesmo, na tentativa de comunicar as ações e os resultados empreendidos em uma atividade exploratória de prova.

Nesse sentido, o uso de tecnologias pode ser um forte aliado para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que levem em consideração novas formas de justificação de proposições, estreitando argumentos elaborados em contextos de ensino com a demonstração matemática.

As experimentações em aplicativos de Geometria Dinâmica assumem uma posição comprobatória para aqueles que lidam com elas, levando à transformação de uma conjectura em prova e permitindo uma comprovação sem a necessidade de produzir justificativas com deduções, como nas chamadas demonstrações.

Queremos dar destaque à função "arrastar", comum nos *softwares* de Geometria Dinâmica. Muitos trabalhos apontam ser tal função concebida em uma perspectiva que abre novas "rotas" para o conhecimento teórico, por meio de um ambiente concreto com muito significado para os estudantes.

A função "arrastar", aparentemente, permite a introdução "infinita" de exemplos e contraexemplos para apoiar ou refutar uma conjectura. Ademais, os estudantes, arrastando, costumam "passar" de figuras para conceitos, bem como de processos indutivos para dedutivos.

> *As possibilidades exploratórias permitidas pela função "arrastar" podem ser vistas como uma contrapartida perceptível para relações lógicas e algébricas, uma vez que, ao "arrastar", os alunos estabelecem associações entre os objetos geométricos em níveis perceptível, lógico e algébrico* (FERREIRA, 2016, p. 313).

Alertamos, porém, que um trabalho em sala de aula não deve ignorar a demonstração formal de uma constatação feita com o uso do recurso tecnológico. Nesse momento, é importante que o aluno compreenda a necessidade de formalizar os seus resultados, por meio de uma demonstração mais rigorosa.

Assim, sendo as demonstrações matemáticas o caminho para se chegar à verdade em Matemática, há que se assumir, quando pensamos em ensino, que é possível chegar nas "verdades" por caminhos distintos. As experimentações podem permitir a elaboração de conjecturas, a comprovação ou refutação das mesmas, além de contribuir no desenvolvimento de formas de comunicar os argumentos elaborados. Cabe ao professor encontrar estratégias para promover uma transição desses argumentos elaborados em sala de aula (provas) para as demonstrações matemáticas.

Com base nos referenciais apresentados nessa seção, retratamos, a seguir, uma experiência de ensino, realizada remotamente, utilizando os pressupostos da experimentação no ensino de Geometria com o uso de recursos tecnológicos.

3. A Atividade: Enquadrando Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais famosos teoremas da Matemática estudados no Ensino Básico. São várias demonstrações desse teorema, embora não se saiba qual foi a prova dada por Pitágoras e se foi ele mesmo que demonstrou o teorema que leva seu nome (KAHN, 2017).

A atividade que apresentamos teve por finalidade levar o aluno a desenvolver a habilidade EF09MA13 descrita na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que propõe demonstrar o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos a partir de investigação matemática por meio de problemas. Os alunos terão que mobilizar conhecimentos adquiridos anteriormente, além de estratégias de resolução de problemas matemáticos, para verificar/validar o Teorema de Pitágoras. Com tantos conceitos matemáticos envolvidos, o foco é levar os alunos a compreender a ideia, por meio de explorações com o uso do *software* GeoGebra, de que o quadrado da medida dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Contudo, chamamos atenção para o fato de que a aprendizagem de novos conceitos por meio de explorações de padrões/propriedades matemáticas precisa estar alicerçada na verificação de alguns conhecimentos prévios dos alunos em relação aos novos conteúdos que serão trabalhados na atividade proposta. Dessa forma, visamos potencializar que os estudantes tenham condições de atuar como sujeitos ativos durante as investigações propiciadas.

Apresentamos, a seguir, algumas das partes que compõem a referida atividade, para que o leitor possa acompanhar as análises posteriores. Destacamos que a atividade, em sua versão completa para impressão e reprodução em outras situações de ensino, está disponível em <https://www.geogebra.org/resource/pmawrrqv/aE1YuUKzhiaJfbKQ/material-pmawrrqv.pdf>.

Apresentação da atividade

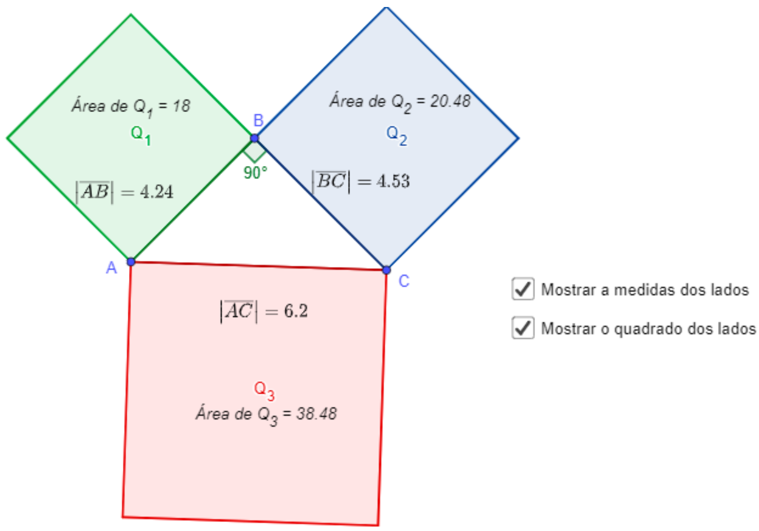
A atividade "Enquadrando Pitágoras" é composta de dois Roteiros que devem ser disponibilizados para os alunos (de forma impressa ou virtual). Mesmo que as abordagens utilizadas nos dois Roteiros sejam diferentes, no que tange ao objeto matemático e suas propriedades utilizados para as explorações durante a atividade (área de quadrado e medida de lado do triângulo), é importante destacar que a nossa intenção foi fazer com que os alunos pudessem estabelecer relações entre as duas abordagens para fazer suas inferências.

No Roteiro 1 utilizamos áreas dos quadrados para explorar o Teorema de Pitágoras. Esse roteiro tem início com a apresentação de um *applet*, conforme a descrição no Quadro 1.

Quadro 1: Roteiro 1

Acesse o *applet* disponível em https://https://www.geogebra.org/classic/zczueekq e responda às questões propostas. Uma tela estado inicial do GeoGebra está mostrada na Figura 2.

Figura 2: Tela inicial do *applet*



Fonte: Elaborado pelos autores(2020)

1. Existem três quadrados construídos nas laterais do triângulo retângulo ABC na figura. Observe a figura e anote as áreas dos três quadrados.

Quadrado vermelho
Quadrado azul
Quadrado verde

Adicione a área do quadrado azul à área do quadrado verde e anote o resultado.

Área do quadrado azul + área do quadrado verde

Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho?

2. Movimente a figura, modificando o seu triângulo retângulo ABC. Cuidado para não modificar a medida do ângulo que determina que o triângulo é retângulo. Para fazer isso, clique no ponto C e o arraste na direção e sentido que você quiser.

Nessa nova figura que você criou, anote as áreas dos três quadrados.

Quadrado vermelho
Quadrado azul
Quadrado verde

Adicione a área do quadrado azul à área do quadrado verde e anote o resultado.

Área do quadrado azul + área do quadrado verde

Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho?

Nas duas questões seguintes, orientamos os alunos a repetirem o procedimento da questão de número 2 quantas vezes julgassem necessário, para que, depois do experimento, escrevessem, com suas próprias palavras, as conclusões tiradas tendo por base as construções, as observações e as respostas às questões realizadas.

Já na questão de número 5, ainda no Roteiro 1, solicitamos que os alunos verificassem se uma relação de igualdade entre as áreas dos quadrados da figura do *applet* era verdadeira, conforme Quadro 2.

Quadro 2: Questão 5 do Roteiro 1

5. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$?

As questões 6 e 7 tinham o mesmo caráter, porém estabelecia uma relação de igualdade entre as áreas, de tal forma que a medida da área de um dos quadrados menores, no caso Q_1 e Q_2, era obtida pela soma dos outros dois quadrados.

A ideia era que o aluno percebesse que apenas uma das relações seria verdadeira, e que esta seria a que comparasse a medida de área do quadrado maior Q_3 com a soma das medidas de área dos outros dois quadrados, a saber Q_1 e Q_2.

No final do Roteiro 1, questionamos os alunos a respeito do que ocorre com a relação observada entre as áreas dos quadrados, quando modificamos o triângulo retângulo ABC para um triângulo qualquer (Quadro 3).

Quadro 3: Questões 6 e 7 do Roteiro 1

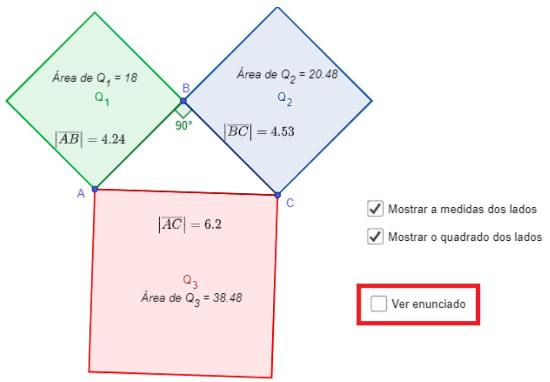
6. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $b^2 = a^2 + c^2$?
7. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $c^2 = a^2 + b^2$?

Já no Roteiro 2, utilizamos a medida dos lados de um triângulo ABC para provocar nos alunos a elaboração de argumentos que os levassem (ou aproximassem) do Teorema de Pitágoras. Eles utilizam-se do mesmo *applet* do Roteiro 1, iniciando com a caixa ”Ver enunciado”ainda desmarcada. No Quadro 4 mostramos parte desse roteiro.

Quadro 4: Roteiro 2

Acesse o *applet* disponível em https://https://www.geogebra.org/classic/zczueekq e responda às questões propostas. Uma imagem da tela inicial está apresentada na Figura 3

Figura 3: Tela inicial do *applet*



Fonte: Elaborado pelos autores(2020)

1. Observe as medidas dos segmentos indicados e registre a seguir:
$|\overline{AC}| =$
$|\overline{AB}| =$
$|\overline{BC}| =$
Com o auxílio de uma calculadora, calcule: (Use duas casas decimais)
$|\overline{AC}|^2 =$
$|\overline{AB}|^2 =$
$|\overline{BC}|^2 =$
Usando a calculadora, verifique se $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$.
Essa afirmação é verdadeira?
Observe na janela do GeoGebra e escreva a medida do ângulo $A\hat{B}C$: $|A\hat{B}C| =$
2. Usando o *mouse*, arraste o ponto C para uma posição diferente da inicial.
Registre as medidas dos segmentos
$|\overline{AC}| =$
$|\overline{AB}| =$
$|\overline{BC}| =$
Com o auxílio de uma calculadora, calcule: (Use duas casas decimais)
$|\overline{AC}|^2 =$
$|\overline{AB}|^2 =$
$|\overline{BC}|^2 =$
Usando a calculadora, verifique se $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$.
Essa afirmação é verdadeira?
Observe na janela do GeoGebra e escreva a medida do ângulo $A\hat{B}C$: $|A\hat{B}C| =$

As questões seguintes, 3 e 4, solicitam a repetição do procedimento feito na questão 2, incentivando a análise de novas configurações para os triângulos. Posteriormente, na questão de número 5 desse roteiro pedimos que os alunos movimentassem os cursores e descrevessem suas observações, como mostra o Quadro 5

Quadro 5: Questão 5 do Roteiro 2

5. Usando o *mouse*, movimente os pontos da figura e observe se, em algum momento, a relação expressa nos itens 1, 2 e 3 é verdadeira. **Se isso ocorrer, descreva que característica(s) você pode observar no triângulo?**

Em seguida, nas questões 6 e 7, mostradas no Quadro 6, indicamos aos alunos o procedimento para revelar o enunciado do teorema e, posteriormente, solicitamos que eles escrevessem suas percepções e conclusões.

Quadro 6: Questões 6 e 7 do Roteiro 2

6. Marque a caixa ***Ver enunciado*** para revelar o enunciado de um importante teorema: o Teorema de Pitágoras. **Você chegou a essa conclusão?** 7. **Caso não tenha chegado a essa conclusão, descreva o que você acha que pode ter acontecido?**

A Aplicação da Atividade

Com uma nova realidade de ensino remoto tomando conta do cenário mundial provocado pela pandemia causada pelo coronavírus, vimos uma oportunidade de criar um ambiente de aprendizagem de conceitos geométricos diferente do tradicional, mas com potencialidade de evidenciar nossos alunos como protagonistas maiores do seu conhecimento.

Para a aplicação da atividade, aliamos uma plataforma de um ambiente virtual de aprendizagem (Moodle) o uso de um *software* (GeoGebra) e uma ferramenta de questionário *on-line* (Microsoft Forms), para oferecer ao estudante a oportunidade de dar autonomia aos seus estudos, desafiando-o a buscar e construir seu conhecimento com seus próprios recursos cognitivos. A interação presencial com o professor foi substituída por uma interação em um fórum de discussão, onde todos os alunos envolvidos também puderam observá-la e participar de modo a aprender por meio de comentários e ideias de outros alunos.

Sujeitos e *locus*

Durante o mês de julho de 2020, a atividade "Enquadrando Pitágoras" foi aplicada remotamente para os alunos de uma escola da região metropolitana de Belo Horizonte. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, ambas com 25 estudantes. Dos 50 alunos matriculados nessas turmas, 31 realizaram a atividade e a desenvolveram até o final.

A atividade foi disponibilizada pela plataforma Moodle, um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) já conhecido dos alunos e com o qual eles já estavam bastante familiarizados, visto que já se utilizavam desse ambiente antes mesmo da implementação do ensino remoto emergencial (ERE). Isso contribuiu bastante para que não houvesse dúvidas quanto à navegação dentro do ambiente.

Destacamos, também, que dentre as atividades realizadas anteriormente no presente ano estão atividades de exploração e manipulação do GeoGebra que tinham como objetivo tornar o aluno familiarizado com esse aplicativo, de tal forma que em atividades posteriores não ocorressem muitas dúvidas quanto ao uso básico do *software*.

Coleta de dados

Para que as respostas dos alunos durante a realização da atividade pudessem ser coletadas de forma mais dinâmica, utilizamos como ferramenta de coleta de dados um questionário elaborado no Microsoft Forms[1], no qual colocamos todo o roteiro da atividade. Esse questionário pôde ser acessado pelo computador ou por um *smartphone* utilizando o *link* disponibilizado ou *qrcode*. A Figura 4 mostra a visualização que o aluno tinha, de acordo com o dispositivo utilizado.

Figura 4: Tela inicial do formulário no *smartphone* e no navegador.

Fonte: Elaborado pelos autores(2020)

Sobre a aplicação

Inicialmente, durante uma aula síncrona de 50 minutos, dois dias antes da data prevista para a aplicação da atividade, o professor aplicador usou 15 minutos para orientar os alunos sobre as características da atividade que seria disponibilizada bem como o tempo que ela permaneceria disponível para realização. Nesse encontro virtual, os alunos foram avisados que deveriam tentar

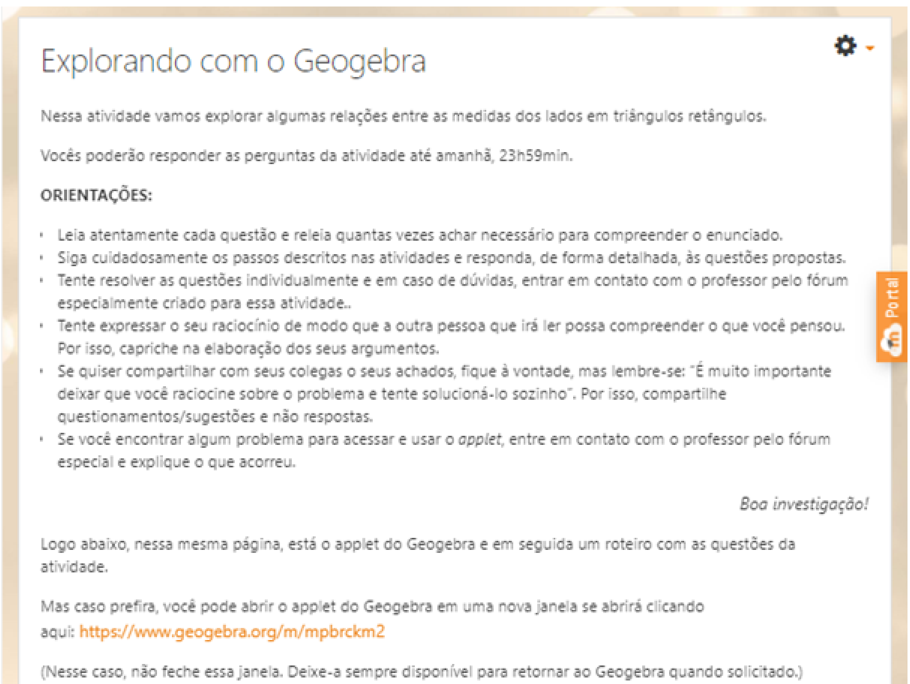
[1] O questionário pode ser acessado em <https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAAAAAAAAAAAMAAM7a8JZUQkxBVlpRTlBYSlZXT05DMEVEUko2QVkyUi4u>

dar respostas "completas" para os questionamentos, relatando o máximo de detalhes possíveis. Além disso, foram avisados que a atividade ficaria disponível durante dois dias para que pudessem realizá-la e que eles deveriam preparar o material usual de aula (caderno para anotações, livro etc.) antes de iniciar a atividade. Foram orientados a escolher um lugar e horário em que não seriam interrompidos, de preferência, pois mesmo o questionário estando disponível por dois dias, o aluno só poderia faze-lo uma única vez, embora não existisse limite de tempo para realização da atividade e quantidade de acessos. Assim, o aluno poderia começar em um dia e finalizar no outro.

Design da Atividade

No dia determinado para a disponibilização e a realização da atividade realizada de forma assíncrona, orientações foram disponibilizadas no ambiente Moodle. Na Figura 5 apresentamos como essas orientações estavam expressas.

Figura 5: Orientações para a atividade .



Fonte: Elaborado pelos autores(2020)

Após as orientações, no próprio AVA dos alunos, foram disponibilizados também o *applet* do GeoGebra utilizado para as experimentações e o questionário no Microsoft Forms. Também foi disponibilizado um *link* para acessar o *applet* e outro para acessar o questionário em uma página fora do ambiente, caso o aluno preferisse ou encontrasse algum problema técnico.

4. Análise dos dados

Após a aplicação da atividade foi possível verificar as respostas dos alunos no relatório fornecido pela plataforma do Microsoft Forms. A seguir, apresentamos alguns dos dados levantados e por nós interpretados com a aplicação da atividade.

Para garantir a confidencialidade dos dados e seus sujeitos usaremos uma numeração para indicar os alunos e suas respostas nas análises apresentadas. Essa numeração foi atribuída de acordo com uma planilha elaborada pelo próprio recurso do formulário *on-line* na medida em que os alunos iam terminando a atividade. Dessa forma, o primeiro aluno que finalizou a atividade denotamos por Aluno 1 e o último aluno a terminar a atividade denotamos por Aluno 31.

Primeiras observações

Para permitir uma interação (mesmo que virtual) dos alunos, já que a realização da atividade aconteceu individualmente, os alunos tiveram um fórum exclusivo para comunicarem-se com o professor caso encontrassem alguma dificuldade ao longo do desenvolvimento da atividade.

Essa possibilidade de interação está de acordo com a concepção de elaboração da atividade moldada em preceitos de uma atividade exploratória, em que a interação entre os envolvidos (alunos e professores) mostra-se fundamental para a elaboração de argumentos a partir da socialização dos achados. Os argumentos expressos ao longo da atividade, sejam em forma de dúvidas ou conjecturas, ajudam os alunos a irem refinando seus raciocínios e elaborando novas inferências até que se entenda que a tarefa foi concluída. Nesse processo, muito conhecimento é produzido, e cabe ao professor, enquanto mediador da atividade, ir direcionando seus alunos para a consolidação do conhecimento. Infelizmente, pouca interação ocorreu com a aplicação feita remotamente. Essa afirmação está baseada no fato de que apenas um dos alunos fez uso do forúm disponibilizado pelo professor para as dúvidas. No Quadro 7, a mensagem do Aluno 17:

Quadro 7: Mensagem do aluno

Mensagem do Aluno 17: *"Não consegui fazer a avaliação pois quando alterava o d1 e d2 quando foi pedido a soma das áreas dos quadros verde e azul não dava igual a medida da área do quadrado vermelho assim como no primeiro exemplo."*

Diante desse questionamento, percebemos que o Aluno 17 estava tentando alterar os controles d1 e d2 para que a soma das medidas das áreas dos quadrados verdes e azul ficasse igual à medida da área do quadrado vermelho. Em menos de uma hora, o professor respondeu ao Aluno 17 no fórum (Quadro 8):

Quadro 8: Resposta do professor

Mensagem do professor: *"Olá! O fato de a soma das áreas ser igual nem sempre vai acontecer. Leia com atenção as perguntas. Detalhe: não se esqueça que nesse momento da atividade que você descreve, é pedido que você crie novos triângulos retângulos. Isto é, modifique o triângulo, mas construa novos triângulos retângulos. Ah! E fique atento às perguntas!!! Leia e releia quantas vezes for necessário."*

Além dessa interação, nenhum outro aluno relatou algum problema ou dúvida pelo fórum. Vale ressaltar que essas mensagens deixadas no fórum ficaram visíveis para que outros alunos pudessem consultar as dúvidas dos outros.

Dos 31 alunos que responderam até o final, a média de tempo gasto para realização da atividade foi de 109 minutos com mediana 59 minutos. O aluno que gastou menos tempo precisou de 13 minutos para finalizar a atividade. Pelas respostas apresentadas podemos inferir que ele realizou tudo o que foi pedido, porém, por se tratar de um aluno repetente e já conhecer o Teorema de Pitágoras, talvez tenha realizado a atividade já sabendo de qual assunto se tratava.

Dois alunos (Aluno 30 e Aluno 31) gastaram 150 minutos para realizar a atividade, tendo iniciado e terminado no mesmo horário. Destacamos que as respostas fornecidas por esses dois alunos são idênticas. O tempo gasto por esses dois alunos só é superado pelo aluno que gastou 1407 minutos, ou seja, quase um dia.

Das conclusões possíveis, podemos dizer que esses dois alunos fizeram a atividade juntos, mostrando que interagiram durante a atividade para elaboração dos argumentos, já que gastaram um tempo razoável para o desenvolvimento. Dizer que um copiou as conclusões do outro também é uma possibilidade, mas nosso conhecimento desses alunos, e pelos dados registrados de data e tempo de realização da atividade, nos faz inferir que eles desenvolveram a tarefa discutindo cada um dos passos.

Análise da experiência com o desenvolvimento da Atividade

Inicialmente, quando elaboramos a atividade Enquadrando Pitágoras, a desenvolvemos para ser aplicada presencialmente, uma vez que a dinâmica de interação entre os alunos e professor oportunizaria mais situações para elaborações de argumentos, à medida que a atividade fosse sendo realizada.

Ao escolher aplicar a atividade remotamente, sabíamos dos possíveis prejuízos que teríamos com relação às observações que seriam permitidas caso a aplicação da atividade fosse realizada em um laboratório de informática e mediada pelo professor, presencialmente.

Além disso, sabíamos de antemão de outros prejuízos que, de alguma forma, poderiam comprometer nossas observações do experimento e estão relacionados às atitudes e motivações dos alunos – que podem ter sido diferentes daquelas vivenciadas em uma situação habitual de aprendizagem – e também ao gerenciamento e controle dos alunos que participavam do desenvolvimento da atividade por meio de uma ferramenta de aprendizagem *on-line* em suas casas ou em outros lugares.

Entretanto, surpreendemo-nos com os resultados encontrados com a experiência, já que muitos dos nossos alunos conseguiram chegar à conclusão pretendida de que o Teorema de Pitágoras é válido e ocorre apenas em triângulos retângulos. Apenas seis alunos, dos 31 que fizeram a atividade, não observaram a relação.

Mesmo que esse número (seis alunos) represente um percentual considerável (cerca de 20%), julgamos relevante o índice de alunos que concluíram corretamente o Teorema, uma vez que atividades de exploração normalmente são feitas com a mediação do professor que, a partir de questionamentos aos argumentos que vão sendo elaborados pelos alunos, os direciona para conclusões mais plausíveis. Como remotamente essa prática foi inviabilizada, os resultados realmente nos surpreenderam, pois os alunos mostraram-se capazes de estabelecer relações corretas, de maneira autônoma e investigativa.

Na aula *on-line* (síncrona) seguinte à realização da atividade, reservamos um momento para discussão. Todos os alunos foram convidados a relatar suas percepções sobre a atividade, mas apenas dois alunos participaram, voluntariamente.

Dos 6 alunos que afirmaram não ter chegado à conclusão, dois (Aluno 4 e Aluno 23) não participaram dessa aula *on-line*. Os outros 4 alunos foram chamados a participar e interagir, mas não quiseram responder.

Em seguida, nessa mesma aula online, o Teorema de Pitágoras foi demonstrado formalmente com alguns exemplos de sua aplicação.

Queremos registrar que, mesmo diante das dificuldades em realizar remotamente uma atividade com características exploratórias, achamos a experiência válida, e conseguimos, em parte, atingir os objetivos com a aplicação.

Colocar em evidência o aluno como construtor do seu conhecimento, permitindo que ele "crie" matemática, ajuda-o a estabelecer uma relação melhor com as demonstrações matemáticas e elas passam a fazer mais sentido. Além disso, os alunos experimentam uma sensação de protagonismo quando elaboram argumentos que justificam relações e propriedades matemáticas, sentido-se mais seguros para inferir e conjecturar novas proposições.

Importante destacar que o uso do GeoGebra e outros recursos computacionais foram fundamentais para todo o desenvolvimento, e mostraram-se importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, não podemos negar que o uso de tais recursos precisa fazer parte da atividade profissional dos professores, que podem encontrar, nesses, outros meios para ajudá-los em seu dia a dia escolar.

5. Considerações finais

A construção da atividade considerou a exploração de uma manipulação geométrica que pudesse colocar os alunos diante de uma situação de verificação/demonstração da propriedade. Além disso, a utilização da atividade investigativa pretendia contribuir para a escrita e argumentação matemática.

Assim, direcionamos nossos objetivos para estimular o pensamento argumentativo geométrico dos alunos com a criação e verificação de hipótese, mas sem a intenção de buscar um formalismo lógico. Nesse sentido, a experiência de ensino buscou oportunizar os alunos de vivenciarem uma experiência matemática explorando, experimentando, conjecturando, refletindo e interpretando as relações entre os objetos, buscando justificativas para tais propriedades.

Para realizarmos a atividade "Enquadrando Pitágoras" remotamente, avaliamos quais recursos computacionais estavam disponíveis para os alunos e decidimos por aplicar tal atividade englobando três recursos: o ambiente virtual Moodle, a plataforma de colaboração do GeoGebra e a ferramenta de criação de questionário Forms. O uso dessas ferramentas, bem como de seus recursos, possibilitou uma aplicação que consideramos a ideal para o momento de distanciamento social, visto que não limitou o acesso ao conteúdo aos encontros síncronos, mas, em consonância com a realidade atual da sociedade, possibilitou que o aluno escolhesse o momento ideal para a realização da atividade dentro do prazo estabelecido.

É claro que as perdas nesse tipo de aplicação foram grandes. Por exemplo, não foi possível garantir que os alunos não se comunicassem com todos os outros da sala ou, ainda, que não consultassem fontes que interfeririam negativamente no processo de investigação. Também não podemos afirmar que os resultados apresentados comprovam (ou não) desenvolvimento de experiências matemáticas e da investigação proposta. Mesmo porque, em várias respostas, notamos afirmações ambíguas e conflitantes. Isso não quer dizer que em experiências e investigações matemáticas não ocorram ambiguidades e conflitos; são, inclusive, situações comuns nessas estratégias metodológicas. O que queremos dizer é que, devido ao caráter de aplicação *on-line* da atividade, tivemos poucos instrumentos analíticos para explorar mais os achados.

Foi possível perceber que o uso das ferramentas tecnológicas mostrou-se positivo, uma vez que elas possuem interface amigável e os alunos têm fácil acesso a todas elas. Dessa forma, entendemos que tais ferramentas podem ser aliadas ao ensino presencial, representando novas possibilidades para a prática pedagógica, como em situações de sala de aula invertida.

Com essa experiência, percebemos que é necessário cada vez mais no mundo moderno enfatizar o uso de tecnologias digitais (móveis ou não) para produtividade, comunicação, colaboração, criatividade, análise de dados, avaliação e resolução de problemas, sobretudo na sala de aula.

Referências

[1] Balacheff, N. *Processus de preuve et situations de validation: Educational Studies in Mathematics.* Springer: 1987.

[2] Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. *História da Matemática.* São Paulo: Blucher, 2019.

[3] Courant, R., Robbins, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

[4] Ferreira, F. A. *Provas e Demonstrações: Compreensões de dez anos da produção em Educação Matemática (2003-2013).* 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

[5] Fossa, J. *Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[6] Garbi, G. G. *C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.* São Paulo: Livraria da Física, 2010

[7] Gazire, E. S. *O não resgate das geometrias. 2000.* Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/252634>. Acesso em: 07 de dezembro de 2020.

[8] Kahn, C. H. *Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história.* Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 2007

[9] Vidigal, C.E.L. *Demonstrações geométricas por meio de experimentações.* XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2019, São Paulo. Anais Eletrônicos. Disponível em:<http://eventos.sbem.com.br/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM2019/paper/viewFile/630/528>. Acesso em: 07 de dezembro de 2020.

[10] Villiers, M. *Papel e função da demonstração no trabalho com o Sketchpad*. Educação Matemática, nº 63. Maio/Junho de 2001. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Acesso em: 07 de dezembro de 2020.

Carlos Eduardo Ladeira Vidigal
CEFETMG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
<carlos.vidigal@outlook.com>

Fernanda Aparecida Ferreira
CEFETMG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
<fernandaf@cefetmg.br>

Recebido: 15/10/2020
Publicado: 02/02/2021

Chamada Temática ”Experiências didáticas em Matemática no período de isolamento social”