PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.7, n.2, 2019
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715

Bases Numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares Alexys Bruno-Alfonso Grazielle Feliciani Barbosa

Resumo

Neste artigo são discutidos de forma detalhada três problemas que foram propostos para as Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) e que de forma criativa lidam com bases numéricas. O intuito é que esses possam ser usados no treinamento de estudantes que se preparam para olimpíadas internacionais. O material também pode ser usado por professores e estudantes do ensino universitário. O primeiro problema explora a base ternária em relação a triplas aritméticas (três números consecutivos em progressão aritmética). No segundo problema é pedido determinar um elemento de uma sequência que serve como base mista e pode ser correlacionado com a base octal. E no terceiro problema deve-se encontrar a ordem de um elemento de uma sequência que é usado como código de primos em uma base binária.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática; Sequências; Ensino Médio; Ensino Universitário; Bases Numéricas

Abstract

In this article we discuss in detail three problems that were proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) and that in a creative way deal with numerical bases. The intention is that these problems be used to train students preparing for international olympics. The material can also be used by university teachers and students. The first problem explores the ternary base in relation to arithmetic triples (three consecutive numbers in arithmetic progression). In the second problem it is asked to determine an element of a sequence that serves as a mixed base and can be correlated with the octal base. And in the third problem one must find the order of an element of a sequence that is used as prime code on a binary basis.

Keywords: International Mathematical Olympiad; Sequences; High School Education; University Teaching; Numerical Systems

1. Introdução

As bases numéricas têm permitido à humanidade representar contas e medidas usando um conjunto de símbolos (dígitos) para formar números e realizar operações com esses, como somas e multiplicações. Em 1957, um estudante de 12 anos, George Bergman, mostrou que era possível usar um

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

número irracional (a razão áurea maior, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) como base de uma base numérica posicional para representar qualquer número real [2]. Tal resultado, atrelado ao problema de correção de erros nas operações críticas de computadores, tem motivado uma intensa pesquisa em anos recentes [1].

O assunto "Bases Numéricas", porém, pode ser visto por alguns professores de Matemática como tedioso. O presente artigo procura reverter essas ideias e mostrar, mediante a discussão de três problemas, extraídos das propostas de perguntas para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que as bases numéricas podem ser ensinadas desde outras perspectivas.

O primeiro problema, proposto para a IMO de 1983, explora a base ternária em relação a triplas aritméticas (três números consecutivos em progressão aritmética). No segundo problema, proposto para a IMO de 1998, é pedido determinar um elemento de uma sequência que serve como base mista e pode ser correlacionado com a base octal. E no terceiro problema, proposto para a IMO de 1995, deve-se encontrar a ordem de um elemento de uma sequência que é usado como código de primos em uma base binária.

Os três problemas mencionados fazem parte de um conjunto de vinte e seis problemas sobre sequências, que serão apresentados por parte dos autores (primeiro e terceiro) em uma Tese de Mestrado do Profmat, relacionada com o treinamento de estudantes do ensino médio para participar de Olimpíadas Internacionais de Matemática [4].

2. Exemplos de transformações entre bases numéricas

Um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 10 são $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, pode ser escrito como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^n a_n$$

Em geral, seja $b \geq 2$ um número inteiro, podemos representar um número inteiro não negativo na base b usando os dígitos $a_i \in \{0, 1, \cdots, b-1\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, e transformá-lo à base decimal como

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b = a_0 + b \cdot a_1 + b^2 a_2 + \cdots + b^{n-1} a_{n-1} + b^n a_n$$

Em particular, um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 8 (Octal) são $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 7\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$ pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_8 = a_0 + 8a_1 + 8^2 a_2 + \cdots + 8^{n-1} a_{n-1} + 8^n a_n$$

e um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 2 (Binária) são $a_i \in \{0, 1\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_2 = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^{n-1} a_{n-1} + 2^n a_n$$

Exercício: Levar à base decimal os números $(7302)_8$ e $(10100)_2$.

$$(7302)_8 = 2 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 3 + 8^3 \cdot 7 = (3778)_{10} = 3778$$

$$(10100)_2 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 = (20)_{10} = 20$$

Inversamente, dado um número representado na base decimal podemos escrevê-lo em qualquer outra base usando sucessivamente a divisão pela base com resto ou euclidiana. O número que no passo n-ésimo for quociente passa a ser dividendo no passo de ordem $n+1$. O processo conclui quando o quociente é zero.

Exercício: Representar $(2019)_{10} = 2019$ nas bases 2 e 8.

Solução: Dividindo sucessivamente por 2 temos

$$2019 = 2 \cdot 1009 + 1$$

$$1009 = 2 \cdot 504 + 1$$

$$504 = 2 \cdot 252 + 0$$

$$252 = 2 \cdot 126 + 0$$

$$126 = 2 \cdot 63 + 0$$

$$63 = 2 \cdot 31 + 1$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Tomando os restos em ordem inversa segue que $2019 = (11111100011)_2$.

Analogamente, dividindo sucessivamente por 8 temos

$$2019 = 8 \cdot 252 + 3$$

$$252 = 8 \cdot 31 + 4$$

$$31 = 8 \cdot 3 + 7$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Tomando os restos em ordem inversa segue que $2019 = (3743)_8$.

3. Base Três, Progressão Aritmética e Geométrica

Provar que é verdadeiro ou que é falso: Do intervalo $[1, 30000]$ pode ser selecionado um subconjunto de 1000 inteiros que não contém tripla aritmética (três números consecutivos em progressão aritmética).

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França [6]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [3].

Solução:

Seja $\{T_n\}$ o conjunto de inteiros positivos que na base três é representado por, no máximo, n dígitos sendo que nenhum deles é 2. Isto é,

$$T_n = a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^{n-1}, \tag{1}$$

com $a_i \in \{0, 1\}$ para $0 \leq i \leq (n-1)$. Como para cada a_i somente existem duas possibilidades, zero ou um, e existem n escolhas, a cardinalidade, ou número de elementos, de $\{T_n\}$ é

$$| \; T_n \; | = 2^n. \tag{2}$$

O maior elemento de $\{T_n\}$ é encontrado quando todos os coeficientes são iguais a um:

$$\max \{T_n\} = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^{n-1}. \tag{3}$$

Mas a equação anterior é uma soma de uma progressão geométrica de razão 3, logo

$$\max \{T_n\} = \frac{3^n - 1}{2}. \tag{4}$$

Proposição 1. *Não existe tripla aritmética em $\{T_n\}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma tripla aritmética (x, y, z) tal que seus elementos sejam um subconjunto de $\{T_n\}$: $\{x, y, z\} \subset \{T_n\}$. Como x, y e z são inteiros consecutivos de uma progressão aritmética, vale que

$$2y = x + z \tag{5}$$

Com $y \in \{T_n\}$ segue que os coeficientes de $2y$, lado esquerdo de (5), na base 3 são somente 0 ou 2:

$$y = a_{0y} \cdot 3^0 + a_{1y} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)y} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{iy} \in \{0, 1\}$ para $0 \leq iy \leq (n-1)$ e

$$2y = (2 \cdot a_{0y}) \cdot 3^0 + (2 \cdot a_{1y}) \cdot 3^1 + \cdots + (2 \cdot a_{(n-1)y}) \cdot 3^{n-1}$$

com $2 \cdot a_{iy} \in \{0, 2\}$ para $0 \leq iy \leq (n-1)$.

Estudaremos agora o lado direito de (5). Temos que $x, z \in \{T_n\}$, logo podemos escrever

$$x = a_{0x} \cdot 3^0 + a_{1x} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)x} \cdot 3^{n-1}$$

$$z = a_{0z} \cdot 3^0 + a_{1z} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)z} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{ix}, a_{iz} \in \{0, 1\}$ para $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Notamos que a soma $a_{ix} + a_{iz} \in \{0, 2\}$ quando $a_{ix} = a_{iz} = 0$ ou $a_{ix} = a_{iz} = 1$ para todo $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Isto é, no caso em que

$$x = z$$

e por (5) $x = y = z$. Contradição, $x \neq y \neq z$. Como os lados direito e esquerdo de (5) são incompatíveis concluímos que não existe tripla aritmética em $\{T_n\}$. $\square$

Considere $n = 10$, de (2) e (4) calculamos

$$\mid T_{10} \mid = 2^{10} = 1024 > 1000$$

$$\max \{T_{10}\} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524 < 30000$$

Logo, a afirmação do problema é verdadeira. O conjunto $\{T_n\}$ é um subconjunto de $[1, 30000]$ com mais de 1000 inteiros e não contém tripla aritmética.

4. Base Mista, Binária e Octal

Seja $a_0, a_1, a_2, ...$ uma sequência crescente de inteiros não negativos tal que cada número inteiro não negativo possa ser escrito de forma única como

$$a_i + 2a_j + 4a_k, \tag{6}$$

onde i, j, k não são necessariamente diferentes. Determinar a_{1998}.

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan [6]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [3].

Solução:

Note que devemos escrever de forma única todos os números inteiros não negativos como uma combinação linear (6) dos elementos da sequência (a_n). Isso leva a que, dada a sequência até o termo de ordem $n-1$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, o termo de ordem n, a_n, é o menor inteiro positivo que não seja da forma $a_i + 2a_j + 4a_k$, com i, j, $k < n$.

Vamos encontrar os primeiros termos da sequência de forma intuitiva. O primeiro inteiro não negativo é o zero. Para escrever zero na forma em (6) devemos ter $a_0 = 0$:

$$0 = a_0 + 2a_0 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.$$

Não temos como escrever 1 usando somente $a_0 = 0$. Isso leva a adicionar o número 1 na sequência (a_n), logo $a_1 = 1$. Com isso podemos escrever os números do 1 ao 7 usando somente dois elementos da sequência $a_0 = 0, \ a_1 = 1$:

$$1 = a_1 + 2a_0 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$2 = a_0 + 2a_1 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$3 = a_1 + 2a_1 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$4 = a_0 + 2a_0 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$5 = a_1 + 2a_0 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$6 = a_0 + 2a_1 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1,$$

$$7 = a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1.$$

O número 8 não pode ser escrito usando somente dois elementos da sequência: $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. Isso leva a adicionar o número 8 na sequência (a_n), logo $a_2 = 8$:

$$8 = a_2 + 2a_0 + 4a_0 = 8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.$$

O número 9 não pode ser escrito usando somente três elementos da sequência: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 8$. Isso leva a adicionar o número 9 na sequência (a_n), logo $a_3 = 9$. Com quatro elementos da sequência é possível escrever os números do 9 até o 63:

$$9 = a_3 + 2a_0 + 4a_0 = 9 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$63 = a_3 + 2a_3 + 4a_3 = 9 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9.$$

Segue que $a_4 = 64$ *e* $a_5 = 65$. Resumindo, os primeiros termos da sequência são

$$(a_n) = (0, 1, 8, 9, 64, 65, \cdots).$$

Sabemos que todo número inteiro não negativo m pode ser escrito de forma única na base binária:

$$m = 2^0 t_0 + 2^1 t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + \cdots + 2^r t_r \tag{7}$$

com $t_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \cdots, r$. Por outro lado, queremos escrever m como em (6):

$$m = 2^0 a_i + 2^1 a_j + 2^2 a_k. \tag{8}$$

Uma comparação entre (7) e (8) sugere escolher a_i, a_j e a_k como somas finitas:

$$a_i = t_0 + 2^3 t_3 + 2^6 t_6 + \cdots = t_0 + 8t_3 + 8^2 t_6 + \cdots$$

$$a_j = t_1 + 2^3 t_4 + 2^6 t_7 + \cdots = t_1 + 8t_4 + 8^2 t_7 + \cdots$$

$$a_k = t_2 + 2^3 t_5 + 2^6 t_8 + \cdots = t_2 + 8t_5 + 8^2 t_8 + \cdots$$

As três equações anteriores podem ser reescritas como

$$a_n = s_0 + 8s_1 + 8^2 s_2 + \cdots + 8^r s_r, \tag{9}$$

onde $s_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \cdots, r$. Em outras palavras, a sequência (a_n) consiste dos números inteiros não negativos que podem ser escritos em base 8 usando somente zeros e uns.

Para encontrar um termo arbitrário de (a_n) devemos escrever primeiro n em base 2:

$$n = s_0 + 2s_1 + 2^2 s_2 + \cdots + 2^r s_r. \tag{10}$$

Os s_i em (10) coincidem com os s_i em (9). Vejamos os primeiros termos já encontrados

$$\begin{aligned}
0 = 0 + 2 \cdot 0 \quad &, \quad a_0 = 0 + 8 \cdot 0 = 0,\\
1 = 1 + 2 \cdot 0 \quad &, \quad a_1 = 1 + 8 \cdot 0 = 1,\\
2 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad &, \quad a_2 = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 8,\\
3 = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad &, \quad a_3 = 1 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 9,\\
4 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad &, \quad a_4 = 0 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 64,\\
5 = 1 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad &, \quad a_5 = 1 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 65.
\end{aligned}$$

Como queremos encontrar a_{1998} escreveremos primeiro $1998 = (11111001110)_2$ em base 2:

$$1998 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^5 \cdot 0 + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 1 + 2^8 \cdot 1 + 2^9 \cdot 1 + 2^{10} \cdot 1.$$

Segue que

$$a_{1998} = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 1 + 8^4 \cdot 0 + 8^5 \cdot 0 + 8^6 \cdot 1 + 8^7 \cdot 1 + 8^8 \cdot 1 + 8^9 \cdot 1 + 8^{10} \cdot 1 = 1227096648.$$

5. Código Primo-Binário

Considere números inteiros $x \geq 1$ e seja $p(x)$ o menor primo que não divide x. Em particular, $p(1) = 2$. Quando $p(x) = 2$, defina $q(x) = 1$, caso contrário, defina $q(x)$ como o produto de todos os primos menores que $p(x)$. Considere a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definida por $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ para todo $n \geq 0$. Encontrar todos os valores de n tal que $x_n = 1995$.

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada [6]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [3].

Solução:

Como $q(x)$ é definida por um produto de primos que dividem individualmente x ou $q(x) = 1$, segue que $q(x)$ divide x para todos os números inteiros $x \geq 1$, logo $f(x) = \frac{xp(x)}{q(x)}$ também é um número inteiro positivo.

A Tabela 1 ilustra o cálculo dos primeiros termos da sequência.

n	$p(x_{n-1})$	$q(x_{n-1})$	x_n	x_n fatorado	Cx_n
0			1		0
1	2	1	2	2	1
2	3	2	3	3	10
3	2	1	6	$3 \cdot 2$	11
4	5	6	5	5	100
5	2	1	10	$5 \cdot 2$	101
6	3	2	15	$5 \cdot 3$	110
7	2	1	30	$5 \cdot 3 \cdot 2$	111
8	7	30	7	7	1000
9	2	1	14	$7 \cdot 2$	1001
10	3	2	21	$7 \cdot 3$	1010
11	2	1	42	$7 \cdot 3 \cdot 2$	1011
12	5	6	35	$7 \cdot 5$	1100
13	2	1	70	$7 \cdot 5 \cdot 2$	1101
14	3	2	105	$7 \cdot 5 \cdot 3$	1110
15	2	1	210	$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$	1111
16	11	210	11	11	10000
17	2	1	22	$11 \cdot 2$	10001

Tabela 1: Cálculo dos primeiros termos das sequências (x_n) e (Cx_n).

Seja $(p_0, p_1, p_2, ..) = (2, 3, 5, 7, 11, \cdots)$ a sequência de todos os números primos escritos em ordem crescente.

Notemos primeiramente que, na decomposição de x_n em fatores primos, nenhum primo pode aparecer elevado a uma potência superior a um. De fato, isso é verdade para os primeiros 17 termos listados na Tabela 1. Para completar a demostração por indução em n, observamos que se por hipótese $x_n = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \cdots \cdot p_{n_m}$, então $p(x_n)$ não é nenhum dos p_{n_k} anteriores com $1 \leq k \leq m$. Segue que o produto $x_n p(x_n)$ não terá, na sua decomposição, nenhum quadrado de primo. Dividir por $q(x_n)$ somente reduz (ou deixa igual quando $q(x) = 1$) o número de primos presentes na fatoração de x_n. Segue que $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ é livre de potências superiores a um para todo n.

Como cada número primo aparece somente uma vez (ou não se encontra) na fatoração de x_n, podemos associar de forma única a x_n um código: $Cx_n = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_0$. Onde $s_i = 1$ se p_i divide x_n e $s_i = 0$ se p_i não divide x_n com $0 \leq i \leq l$. Adicionalmente, p_l é o maior primo que divide x_n.

A seguir vamos enunciar e justificar o resultado principal. A representação binária de n coincide com o código de x_n. Isto é, $(n)_2 = Cx_n$. Veja na Tabela 1 a primeira e última colunas.

No caso em que x_n é ímpar temos que $Cx_n = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_1 0$ termina em 0, pois 2 não divide x_n. Segue que $p(x_n) = 2$ e $q(x_n) = 1$. Logo $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot 2}{1}$ é par e $Cx_{n+1} = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_1 1$ tem o mesmo código de x_n com o primeiro dígito da direita trocado de 0 para 1.

Quando x_n é par, temos que Cx_n termina em 1 pois 2 divide x_n. Estudaremos dois subcasos:

(1) $Cx_n = \cdots 000 s_k 11 \cdots 1$ o código de x_n é somente composto de uns, de s_k em diante é tudo zero

e

(2) $Cx_n = \cdots 00s_m \cdots s_{k+1}s_k 11 \cdots 1$ o código de x_n é composto de uns de s_0 até s_{k-1}, $s_k = 0$, de s_{k+1} a s_{m-1} os valores podem ser zero ou um, $s_m = 1$ e de s_{m+1} em diante é tudo zero.

(1) Se $Cx_n = \cdots 000s_k 11 \cdots 1$, temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = x_n$. Segue que $x_{n+1} = p_k$ e $Cx_{n+1} = \cdots 000100 \cdots 0$ com o 1 na posição k-ésima da direita para esquerda.

(2) Se $Cx_n = \cdots 00s_m \cdots s_{k+1}s_k 11 \cdots 1$ temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}$. Segue que $Cx_{n+1} = \cdots 00s_m \cdots s_{k+1} 100 \cdots 0$.

Logo, o efeito da lei de recorrência f sobre o código de x_n é acrescentar um na representação binária de n, isto é, $Cx_{n+1} = f(Cx_n) = (n+1)_2$. Em outras palavras, $(n)_2 = Cx_n$ e x_n determina univocamente n.

Como estamos interessados em encontrar n tal que $x_n = 1995$, primeiro fatoramos 1995:

$$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19$$

A seguir escrevemos o código de 1995:

$$C(1995) = 10001110.$$

Isso corresponde a $n = (10001110)_2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^7 = 142$.

6. Conclusões

O presente artigo discute três problemas propostos em olimpíadas internacionais de matemática para estudantes do ensino médio. O conteúdo explora as bases numéricas de uma forma não usual. No primeiro problema mostramos que não existe tripla aritmética no conjunto formado pelos números que na base três somente usam os dígitos zero ou um. No segundo problema a chave foi encontrar que a sequência (a_n) era formada pelos números que na base oito usam somente zeros ou uns. E no terceiro problema mostramos que fatorando em primos os elementos da sequência (x_n) e usando um código com zeros e uns descobrimos n escrito em binário. Outros três problemas da IMO relativos a série harmônica encontram-se em [5].

Agradecimentos

Agradecemos aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat

Referências

[1] Alexey Stakhov, *Mission-Critical Systems, Paradox of Hamming Code, Row Hammer Effect,* 'Trojan Horse'of the Binary System and Numeral Systems with Irrational Bases, The Computer Journal, Volume 61, Issue 7, July 2018, Pages 1038–1063, https://doi.org/10.1093/comjnl/bxx083.

[2] Bergman, George (1957) *A Number System with an Irrational Base.* Math. Mag., Vol. 31. doi:10.2307/3029218. JSTOR 3029218.

[3] Djukic D. e col., The IMO Compendium -*A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004,* Springer, 2006. http://web.cs.elte.hu/∼nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em 30/06/2019.

[4] Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil (2019). Orientadora Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa. Disponível em https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881.

[5] López, J., Bruno-Alfonso, A. e Barbosa, G.F. *A Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática*, VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (Ermac), 17-19 Junho de 2019, Bauru, SP, Brasil, Caderno de Trabalhos e Resumos, página 16, 2019, Disponível em https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/

[6] Sitio oficial das Olimpíadas Internacionais de Matemática, http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em 30/06/2019.

Juan López Linares
Universidade de São Paulo
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA-USP)
<jlopez@usp.br>

Alexys Bruno-Alfonso
Unesp, Faculdade de Ciências de Bauru
Departamento de Matemática
<alexys.bruno-alfonso@unesp.br>

Grazielle Feliciani Barbosa
Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Matemática (DM-UFSCar)
<grazielle@dm.ufscar.br>

Recebido: 28/06/2019
Publicado: 10/10/2019