

# Cadeias de Markov: Uma introdução apresentável ao ensino médio com aplicação ao soneto “Amor é fogo que arde sem se ver”

Alicia Maria do Nascimento Amorim<sup>ID</sup> Anna Karla Barros da Trindade<sup>ID</sup> Francisco de Paula Santos de Araujo Junior<sup>ID</sup>

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar alguns conceitos e problemas básicos sobre cadeias de Markov, bem como os conteúdos diretamente ligados a esse tema, mostrando que ele pode ser explorado desde o ensino médio. Esse tópico acaba sendo uma aplicação da álgebra linear à probabilidade, por esse motivo há duas seções de conteúdos preliminares neste artigo que expressam conceitos sobre matrizes e probabilidade. Para mostrar a interdisciplinaridade que as cadeias de Markov podem proporcionar, foi feita a análise do poema “amor é fogo que arde sem se ver” – assim como fez Andrey A. Markov na obra *Eugene Onegin*. Procuram-se padrões de vogais e consoantes, visto que o soneto de Camões é um marco na literatura portuguesa, assim como a obra supracitada foi marcante na literatura russa.

**Palavras-chave:** Cadeias de Markov; Probabilidade; Matrizes; Soneto.

## Abstract

The present work aims to present concepts and basic problems about Markov chains, well as the content directly linked to this topic, showing that this can be explored already in high school. This topic ends up being an application linear algebra and probability, for this reason there are two sections of preliminary content in this article that express concepts about matrices and probability. To show the interdisciplinarity that the Markov chains can provide, the analysis of “love is fire that burns without seeing” will be made - just as did Andrey A. Markov in the “Eugene Onegin” work. Search for standards of vowels and consonants, since the sonnet of the Camões is a landmark in Portuguese literature, as well as the above-mentioned work was striking in Russian literature.

**Keywords:** Markov chains; Probability; Matrices; Sonnet.

## 1. Introdução

A teoria sobre cadeias de Markov teve início em 1883 quando Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), de acordo com Magela (2015), analisou a sequência de vogais e consoantes na obra *Eugene Onegin*. Durante este processo verificou as probabilidades relativas entre vogais e consoantes. Essa análise feita por Markov passou a ser conhecida como cadeias de Markov.

De acordo com Ramos (2017), uma cadeia de Markov é um processo estocástico (Definição 2) no qual a distribuição de probabilidade dos passos futuros depende apenas do estado presente. Através das cadeias de Markov é possível prever algum evento probabilístico apenas observando o que ocorre no presente, desconsiderando tudo o que aconteceu nos estados anteriores.

A ideia principal deste trabalho é apresentar os principais elementos teóricos sobre as cadeias de Markov, exemplificando de maneira acessível sempre que for possível. Assim, acredita-se que este material possa ser trabalhado por professores já no ensino médio como um complemento do estudo de matrizes e probabilidade, servindo como forma de facilitar o estudo de probabilidade já que, por Magela (2015, p.12), as cadeias de Markov podem ser apresentadas como um método de resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento. Algumas destas áreas são: administração, biologia, genética, sociologia, meteorologia e teoria de Jogos.

Segundo o Parâmetro Curricular Nacional (PCN) referente à matemática no ensino médio: ,

*O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (MEC, 1999, p.44)*

Para auxiliar o entendimento, esse artigo foi dividido em 7 seções: Introdução; Estudo e conceitos a respeito de probabilidade, onde se encontram definições e problemas envolvendo este conteúdo; Matrizes, no qual há apenas conceitos básicos mas necessários para que o leitor compreenda a temática do texto; Cadeias de Markov, em que apresenta-se conceitos e exemplos sobre esse tema; Cadeias de Markov e o soneto: “Amor é fogo que arde sem se ver”; Trabalhos relacionados, onde são citados artigos que tratam do mesmo tema, porém com abordagem diferente; Considerações finais.

Durante a Seção 5, apresenta-se uma recriação da análise feita por Markov utilizando um famoso soneto de Luís Vaz de Camões.

## 2. Estudo e conceitos a respeito de probabilidade

Apresenta-se nesta seção a teoria de probabilidade necessária apenas para a compreensão do principal tópico deste artigo, o qual é o objeto de estudo neste trabalho. O leitor interessado em mais detalhes sobre tal conteúdo pode recorrer à bibliografia em Lipschutz (1993) ou Julianelli (2009).

Segundo Magela (2015), o estudo de probabilidades começou a ter destaque no século XVII, através de debates sobre problemas de jogos de azar entre Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665) e Antonie Gombaud (1607-1684).

A seguir, veja algumas definições dadas por Lipschutz (1993).

**Definição 2.1. (Espaço amostral)** É o conjunto  $S = \{s_1, s_2, \dots\}$  de todos os resultados possíveis de um experimento, sendo  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  se o evento possuir um número  $n$  (finito) de pontos.

**Definição 2.2. (Ponto amostral)** É um resultado particular do espaço amostral. Portanto, é um ponto de  $S$ .

**Definição 2.3. (Evento)** É um conjunto constituído pelos resultados do espaço amostral. Assim sendo, é um subconjunto de  $S$ .

Há três tipos de eventos: O elementar (ocorre quando o espaço amostral possui um único elemento  $a \in S$ ), Evento impossível (simbolicamente representado por  $\emptyset$ ) e o evento certo (quando o evento é constituído do próprio espaço amostral  $S$ ). Sendo  $A$  o evento “sair cara na face de cima da moeda”, se isso ocorrer  $s$  vezes dentre um total de  $n$  maneiras *equiprováveis* – que apresentam a mesma chance de ocorrer – então a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  é dada por

$$P = P(A) = \frac{s}{n}. \quad (1)$$

**Exemplo 1.** Imagine agora o lançamento de um dado comum. Ou seja, considere o experimento aleatório chamado: resultado obtido com o lançamento de um dado. Há o seguinte conjunto de resultados possíveis:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . A probabilidade de ocorrer o evento “sair 3 na face superior do dado” é  $\frac{1}{6}$ .

**Definição 1. (Probabilidade Condicional)** Considere  $E$  um evento qualquer em um espaço amostral  $S$ , com  $P(E) > 0$ , ou seja, com a probabilidade de ocorrer o evento  $E$  maior que zero. A probabilidade de ocorrer um evento  $A$ , também pertencente ao espaço amostral  $S$ , uma vez que  $E$  tenha ocorrido é dada por

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

Observe agora um importante teorema, cuja demonstração é consequência da definição de probabilidade condicional, em que se consideram os eventos  $A$  e  $E$  de um espaço amostral  $S$ .

**Teorema 1. (Multiplicação para Probabilidade Condicional)** Dada a igualdade  $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$ , que define a probabilidade condicional de  $A$  dado  $E$ , então,  $P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A|E)$ .

**Definição 2. (Processo Estocástico Finito)** É uma sequência finita de experimentos em que cada um deles tem um número finito de resultados com uma certa atribuição de probabilidade.

Para descrever um processo estocástico e calcular a probabilidade de qualquer evento, é muito simples e útil a utilização do diagrama de árvore que, como o próprio nome já diz, assemelha-se aos galhos de uma árvore. Cada um desses “galhos” traz consigo a probabilidade de determinado evento ocorrer. Veja no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.** (NOGUEIRA, 2009) Uma seguradora possui três tipos de seguros ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) para automóveis no primeiro momento de vendas. As probabilidades de escolha desses pacotes são 50% para a opção  $A$ , 30% para a opção  $B$  e 20% para a opção  $C$ , sendo obrigatório que o cliente use o mesmo tipo de seguro por pelo ou menos um mês. Após o primeiro mês de contrato foram constatadas as seguintes informações:

- Das pessoas que escolheram a opção  $A$ , 10% migram para a opção  $B$  e 20% para a opção  $C$ ;
- Das pessoas que escolheram a opção  $B$ , 40% migram para  $A$  e 10% para a opção  $C$ ;
- Das pessoas que escolheram a opção  $C$ , 10% migram para a opção  $A$  e 10% para a opção  $B$ .

Se essa mesma seguradora quer saber qual a probabilidade de um cliente, após o primeiro mês, ter escolhido as opções de seguro  $A$ ,  $B$  e  $C$ , o que deve ser feito?

Devemos seguir as informações dadas no problema. Assim, perceberemos que se, inicialmente, um cliente escolheu a opção A (que possui 50% de chance de escolha em um primeiro momento), após um mês há 10% de chances de ele migrar para o tipo de seguro B e 20% de chance de migrar para o seguro C restando  $100\% - (10\% + 20\%) = 70\%$  de chance de permanecer usufruindo do seguro A. Veja abaixo, no diagrama de árvore da Figura 1.

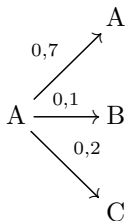


Figura 1: Diagrama de árvore do seguro A.

Daí, utilizando a definição de probabilidade condicional, ao observar os clientes que escolheram o tipo de seguro A, notamos que após o primeiro mês  $\frac{70}{100} \cdot \frac{50}{100} = 35\%$  continuam com o seguro A,  $\frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = 5\%$  passam a usar o seguro B e  $\frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100} = 10\%$  migram para o tipo C.

Seguindo a mesma lógica acima para os clientes que escolheram inicialmente B (que possui 30% de chance de escolha em um primeiro momento) e C (que possui 20% de chance de escolha em um primeiro momento), obtemos que há, respectivamente:

- $\frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} = 15\%$  de chance de o cliente permanecer usando o seguro B,  $\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100} = 12\%$  mudam para o tipo de seguro A e  $\frac{10}{100} \cdot \frac{30}{100} = 3\%$  escolhem C;
- $\frac{80}{100} \cdot \frac{20}{100} = 16\%$  de chance de o cliente permanecer usando o seguro C,  $\frac{10}{100} \cdot \frac{20}{100} = 2\%$  mudam para o tipo de seguro A e  $\frac{10}{100} \cdot \frac{20}{100} = 2\%$  escolhem C.

Observe agora a partir dos diagramas da Figura 2 como foi indicada cada probabilidade.



Figura 2: Diagramas de árvore dos seguros B e C.

Assim, após um mês, as probabilidades de escolha de A, B e C são a soma de cada uma delas

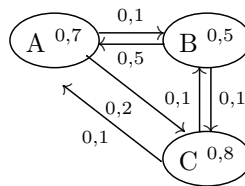
dadas acima, ou seja:

$$P(A) = 0,5 \times 0,7 + 0,3 \times 0,4 + 0,2 \times 0,1 = 35\% + 12\% + 2\% = 0,49 = 49\%;$$

$$P(B) = 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,1 + 0,2 \times 0,1 = 5\% + 15\% + 2\% = 0,22 = 22\%;$$

$$P(C) = 0,2 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 + 0,5 \times 0,2 = 16\% + 10\% + 3\% = 0,29 = 29\%.$$

Podemos, ainda, representar essas probabilidades de transição entre os tipos de seguro conforme consta no Grafo 1 e na Tabela 1.



Grafo 1: Probabilidades de transição entre os tipos de seguro.

	A	B	C
A	0,7	0,1	0,2
B	0,4	0,5	0,1
C	0,1	0,1	0,8

Tabela 1: Probabilidades de transição entre os tipos de seguro.

**Definição 3. (Vetor de Probabilidade)** Considere o vetor  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Diz-se que  $u$  é um vetor de probabilidade se suas componentes  $u_i$  são não negativas e, quando somadas, resultam em 1.

### 3. Matrizes

Segundo Medeiros (2017), há aproximadamente 150 anos os matemáticos Joseph Sylvester e Arthur Cayley foram os precursores do estudo de matrizes, cabendo ao segundo maior aprofundamento em relação às demonstrações e aplicabilidades quanto à mesma.

As aplicações de matrizes envolvem várias ciências; a Matemática é apenas uma delas. Economia e Estatística a utilizam muito por sua capacidade de armazenar dados. Alguns exemplos do uso de matrizes em diversas atividades humanas são computação gráfica, jogos eletrônicos, sistema de rede elétrica, previsões climáticas, armazenamento de informações, confecções de tabelas (como as tabelas de dupla entrada muito utilizadas para calcular a probabilidade de determinado evento), entre outros.

**Definição 4. (Matriz)** Uma matriz, representada arbitrariamente pela letra maiúscula  $A$  e genericamente por  $A_{m \times n}$  ou  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  é um retângulo formado pelos elementos  $a_{i,j}$ , como se pode ver abaixo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

sendo composto por  $m$ - $n$ -uplas horizontais chamadas de linhas, e  $m$ - $n$ -uplas verticais denominadas colunas.

**Definição 5. (Matriz quadrada)** É toda matriz  $M$  tal que o número de colunas é igual ao número de linhas.

**Definição 6. (Matriz estocástica)** É uma matriz quadrada  $M$  tal que cada uma de suas linhas é um vetor de probabilidade, ou seja, a soma dos elementos da  $i$ -ésima linha é sempre igual a 1 e todos os seus componentes são não negativos.

Se todas as entradas de alguma potência  $M^n$  são positivas e não nulas, diz-se que  $M$  é uma matriz estocástica regular.

**Teorema 2.** *O produto de duas matrizes estocásticas é uma matriz estocástica.*

A demonstração não será feita por não ser o objetivo do trabalho. Mas, temos como consequência do Teorema 2 que se  $A$  é uma matriz estocástica, então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$  vezes é uma matriz estocástica.

#### 4. Cadeias de Markov

Ressalta-se que Andrei Andreyevich Markov, matemático russo e amante da poesia, é especialmente lembrado pelos seus estudos sobre cadeias de Markov. Essa teoria tem a capacidade de interligar probabilidade a matrizes, dando uma aplicação direta para esse segundo caso. A mesma surgiu durante a análise, feita por Markov, das alterações de vogais e consoantes do romance *Eugene Onegin*, escrito em forma de poema por Alexander Pushkin.

Esse romance foi considerado por muitos russos, inclusive Dostoievski, uma obra de arte de força criadora, o início da grandeza da língua russa. Então, neste artigo foi selecionada para fazer uma recriação simplificada da análise feita por Markov uma das mais conhecidas obras de Luís Vaz de Camões, um dos autores mais importantes da língua portuguesa, o soneto “Amor é fogo que arde sem se ver”.

Veja a seguir as definições pautadas em Costa (2017) e Lipschutz (1993).

**Definição 7. (Cadeia de Markov)** Considere uma sequência de experimentos cujos resultados que possuem uma certa atribuição de probabilidade são  $x_1, x_2, \dots$ . Diz-se que esse processo estocástico é uma Cadeia de Markov finita, se cada  $x_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , satisfaz as propriedades a seguir:

- (I) Cada  $x_i$  pertence a um conjunto finito de resultados,  $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ , denominado espaço dos estados do sistema;
- (II) O resultado de qualquer experimento depende no máximo do resultado do experimento imediatamente anterior, independentemente de qualquer resultado anterior a esse.

Em suma, uma cadeia de Markov é um processo estocástico, no qual a distribuição de probabilidade dos passos futuros depende apenas do estado presente. Uma definição mais formal pode ser encontrada em Oliveira (2017).

Diz-se que o sistema encontra-se no estado  $s_i$  no instante  $m$  se o resultado da  $m$ -ésima tentativa é  $s_i$ .

Cada par de estados  $(s_i, s_j)$  está associado à probabilidade condicional  $P_{ij}$  de que  $s_j$  ocorre imediatamente após  $s_i$ , ou seja,  $P_{ij}$  é a probabilidade de o sistema passar do estado  $s_i$  para o estado  $s_j$  em apenas uma etapa.

As probabilidades  $P_{ij}$ , chamadas de probabilidade de transição homogêneas – pois não dependem do tempo – podem ser dispostas em uma matriz quadrada de ordem  $m$  ( $m$  linhas e  $m$  colunas). Essa matriz chama-se matriz de transição e segue representada abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}.$$

Cada linha da matriz acima é denominada Vetor de Probabilidade, onde cada estado  $s_i$  corresponde à  $i$ -ésima linha,  $(P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{im})$ , de  $P$  que representa as probabilidades de transição entre os estados num intervalo de tempo discreto, e

$P_{i1}$ : representa a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado 1;

$P_{i2}$ : representa a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado 2.

E assim por diante. Essa matriz é sempre quadrada, pois, se o espaço de estados do sistema possui 3 elementos, teremos que indicar a probabilidade de o estado 1 se manter no estado 1, e de esse mesmo estado passar para o estado 2 e 3. Analogamente, os estados 2 e 3 devem passar pelo mesmo processo, o que fará a matriz ser sempre quadrada, pois terá  $3 \times 3 = 9$  elementos.

**Teorema 3.** *A matriz de transição  $P$  da cadeia de Markov é uma matriz estocástica.*

*Demonstração.* Por definição, a matriz de transição é uma matriz quadrada de ordem  $m$ . Além disso, cada linha é um vetor de probabilidade. Conseqüentemente, a soma  $P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{im}$  é igual a 1. O que caracteriza a matriz de transição  $P$  da cadeia de Markov como uma matriz estocástica. □

Para exemplificar, veja agora um problema adaptado de Lipschutz (1993).

**Exemplo 3.** João vai diariamente para o trabalho de carro ou ônibus. Ele, porém, nunca utiliza o ônibus por dois dias seguidos. Mas, se vai de carro para o trabalho, é tão provável que vá de transporte público quanto no seu carro no dia seguinte.

Nesse exemplo, note que o espaço de estados do sistema é o conjunto  $\{C$  (carro),  $O$  (ônibus) $\}$ . Além disso, esse processo possui a propriedade markoviana, ou seja, é uma cadeia de Markov pois o transporte que João usará no dia seguinte só depende do que ele usou no dia imediatamente anterior. Assim, as probabilidades de ele ir de carro ou ônibus ao trabalho podem ser representadas pela Tabela 2, de duas entradas.

	O	C
O	0	1
C	0,5	0,5

Tabela 2: Probabilidades de transição entre os tipos de transporte.

E a matriz de transição da cadeia de Markov é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

A primeira linha da matriz contém as probabilidades  $P_{OO}$  e  $P_{OC}$ . A primeira referente à probabilidade de ele tomar ônibus, tendo usado esse transporte para ir ao trabalho no dia anterior. A segunda refere-se à probabilidade de ir de carro ao trabalho tendo ido de ônibus no dia anterior.

Considerando um experimento que possui a propriedade markoviana, em que as observações ou tentativas são representadas por meio de distribuições das probabilidades dos estados, diz-se que uma cadeia de Markov é regular quando, para qualquer potência da sua matriz de transição, as probabilidades de transição (seus elementos) são estritamente positivos.

Considere uma matriz  $P$  de transição da cadeia de Markov.

**Teorema 4.** A matriz de transição em  $n$  etapas é igual à  $n$ -ésima potência de  $P$ , ou seja,  $P^{(n)} = P^n$ .

**Teorema 5.** Se  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  é a distribuição de probabilidade do sistema em algum instante arbitrário, então,  $p \cdot P$  é a distribuição de probabilidade do sistema na etapa seguinte e  $p \cdot P^n$  é a distribuição de probabilidade do sistema após  $n$  etapas seguintes. Ou seja,

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P, p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P, \dots, p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n.$$

**Exemplo 4.** Voltemos para o Exemplo 2. Note que, devido a cada tipo de seguro adquirido depender apenas do que foi escolhido anteriormente, esse processo de escolha é uma cadeia de Markov. Pode, portanto, ter suas distribuições de probabilidade dispostas em uma matriz de transição.

Imagine agora que a seguradora quer saber a probabilidade de escolha dos clientes para cada um dos seguros A, B e C após 4 meses. Para tal deveríamos fazer o mesmo processo realizado anteriormente, mais três vezes, certo? Além de cansativo, é um processo demorado, porém pode ser facilitado usando a teoria sobre cadeias de Markov. Para isso foram apresentados os teoremas supracitados, que não foram demonstrados por não ser esse o objetivo deste trabalho.

Então, como  $p^{(0)} = (0,5, 0,3, 0,2)$ , sendo  $p^{(0)}$  a distribuição inicial dos seguros A, B e C respectivamente, e a matriz de transição da cadeia de Markov desse dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Após 4 meses, a probabilidade de escolha de cada seguro é dada por

$$\begin{aligned} p^{(4)} &= p^{(0)} \cdot P^4 = [0,5 \quad 0,3 \quad 0,2] \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^4 \\ &= [0,5 \quad 0,3 \quad 0,2] \cdot \begin{bmatrix} 0,43 & 0,1624 & 0,4076 \\ 0,4564 & 0,188 & 0,3556 \\ 0,3004 & 0,1624 & 0,5372 \end{bmatrix} = [0,412 \quad 0,17008 \quad 0,41792]. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de escolha dos pacotes de seguro A, B e C após o quarto momento é respectivamente 41,2%, 17,008% e 41,792%.

Note que  $P$  é uma matriz estocástica e, conseqüentemente,  $P^n$  também será.



Em alguns casos, quando  $n$  é muito grande, as linhas da matriz de transição tendem a se estabilizar. Ou seja, elas convergem para uma certa probabilidade. Uma distribuição de probabilidade deste tipo é conhecida como medida invariante e pode ser visto no Exemplo 2.1 em Souza Júnior (2016). Tal conceito é fundamental para a realização de previsões a longo prazo sobre o processo markoviano.

**Exemplo 5.** (COSTA, 2017) Toda quarta-feira à noite, Mikael assiste jogo do campeonato brasileiro de futebol da série A ou vai ao cinema, de modo que ele nunca assiste futebol duas quartas seguidas. Entretanto, se ele decidir ir nessa quarta ao cinema, a probabilidade de ir novamente ao cinema na próxima quarta é de  $1/3$ .

i. Esse processo de escolha, por depender apenas do local que Mikael fez na quarta-feira imediatamente anterior, é caracterizado como uma cadeia de Markov onde o espaço dos estados do sistema é representado pelo conjunto  $\{C$  (Mikael ir ao cinema),  $F$  (Mikael assistir jogo de futebol) $\}$ . Desse modo, a Tabela 3 que representa as probabilidades de transição assim como a matriz de transição  $P$  dada abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

	C	F
C	1/3	2/3
F	1	0

Tabela 3: Probabilidades de transição.

- ii. Podemos afirmar que a cadeia de Markov é regular, pois são positivos todos os elementos da matriz de transição. Ou seja, qualquer potência de  $P$  possui elementos positivos.
- iii. Utilizando o Teorema 5 podemos descobrir, após 3 quartas-feiras, qual a probabilidade de Mikael estar assistindo futebol ou estar no cinema.

Note que  $p^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , ou seja, a distribuição de probabilidade do sistema no instante inicial é 50% para cada estado. Como queremos saber a probabilidade após 3 quartas-feiras, devemos encontrar  $p^{(3)} = p^{(0)} \cdot P^3$ , onde  $P^3$  é o produto da matriz estocástica  $P$  por ela mesma três vezes. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} p^{(3)} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13/27 & 14/27 \\ 7/9 & 2/9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17/27 & 10/27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6296 & 0,3704 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, após 3 quartas-feiras, a probabilidade de Mikael estar assistindo futebol é de 62,96%, enquanto a probabilidade de ele estar no cinema é de 37,04%.

## 5. Cadeias de Markov e o soneto: “Amor é fogo que arde sem se ver”

Um poema é um gênero textual dividido em estrofes e versos. É uma obra literária que pertence ao gênero da poesia. Esse tipo textual é fortemente ligado a música, arte e beleza. Já o soneto é um

poema, porém apresenta-se de forma fixa, composta por quatro estrofes, sendo as duas primeiras com 4 versos (quartetos) e as duas últimas com 3 versos (tercetos).

Analisa-se o seguinte soneto de Luís Vaz de Camões (1524-1580):

**Amor é fogo que arde sem se ver**

Amor é fogo que arde sem se ver,  
é ferida que dói e não se sente;  
é um contentamento descontente,  
é dor que desatina sem doer.

É um não querer mais que bem querer;  
é um andar solitário entre a gente;  
é nunca contentar-se de contente;  
é um cuidar que se ganha em se perder.

É querer estar preso por vontade;  
é servir a quem vence, o vencedor;  
é ter com quem nos mata lealdade.

Mas como causar pode seu favor  
nos corações humanos amizade,  
se tão contrário a si é o mesmo amor?

CAMÕES, Luís de. Lírica.  
São Paulo, Edusp, 1982.

Dada uma letra qualquer no texto, verificaremos qual a probabilidade de a letra seguinte ser vogal ou consoante. Isso só dependerá da definição dessa letra, ou seja, vai depender se ela é vogal ou consoante, não importando as letras anteriores a ela. Tal processo estocástico é, então, uma cadeia de Markov.

Para encontrar tal probabilidade foram seguidos os seguintes passos:

1 Unem-se todos os versos e parágrafos do texto, ignorando os espaços entre palavras e pontuações. Observe abaixo.

Amorefogoqueardesemseverreferidaquedoioenaosesenteeumcontentamento descontenteedorquedesati-  
nasemdoerEumnaoquerermaisquebemquerere umandarsolitarioentrea genteenuncacontentarsedecon-  
tenteeumcuidar queseganhaemseperderEquererestarpresoporvontadeserviraquemvence ovencedo-  
retercomquemnosmatalealdadeMascomocausarpodeseufavornoscoracoeshumanos amizadesetaocon-  
trarioiasieomesmoamor

2 Contamos o número de vogal seguida de vogal; o número de vogal seguida de consoante; o número de consoante seguida de consoante; e o número de consoante seguida por vogal.

Após a contagem verificou-se que há um total de 366 letras nesse soneto, sendo 177 vogais e 189 consoantes. Além disso, há 42 vogais seguidas de vogal, 135 vogais seguida de consoante, 54 consoantes seguidas de consoante e 135 consoantes seguidas por vogal. Conseguimos a probabilidade de

cada estado através da definição de probabilidade e das informações sobre a quantidade de letras presentes. Ou seja,

$$P_{V,V} = \frac{42}{177}; P_{V,C} = \frac{135}{177}; P_{C,V} = \frac{135}{189} \text{ e } P_{C,C} = \frac{54}{189}.$$

Representamos na Tabela 4 de duas entradas as probabilidades de transição desse sistema que tem como espaço de estados o conjunto  $\{V \text{ (vogal), } C \text{ (consoante)}\}$ .

	V	C
V	0,237	0,763
C	0,286	0,714

Tabela 4: Probabilidades de transição

Essa tabela também pode ser representada pela *matriz de transição*  $P$ , vista no início desta seção. Assim terá a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} 0,237 & 0,763 \\ 0,286 & 0,714 \end{bmatrix}.$$

A probabilidade de distribuição do sistema no instante inicial é dada pelo vetor  $p^{(0)} = (0,4836; 0,5164)$  onde foram tomadas as taxas de vogais e consoantes presentes em todo o soneto. Assim, se quisermos saber a distribuição de probabilidade do sistema na próxima etapa, ou seja, a probabilidade de a próxima letra ser uma vogal ou consoante, é só resolver a multiplicação de matrizes  $p^{(1)} = p^{(0)}.P$ . Então teremos o seguinte resultado:

$$p^{(1)} = p^{(0)}.P = [ 0,4836 \quad 0,5164 ] \cdot \begin{bmatrix} 0,237 & 0,763 \\ 0,286 & 0,714 \end{bmatrix} = [ 0,2623036 \quad 0,7376964 ] .$$

Portanto, a probabilidade de a próxima letra do poema ser uma vogal é de 26,23036% e ser consoante é de 73,76964%. E temos, então, mais uma aplicação das cadeias de Markov mostrando a interdisciplinaridade fornecida por esse conteúdo, nesse caso voltada para a área de linguística.

Além dessa, há muitas outras aplicações desse ramo da matemática. A seção seguinte traz algumas delas.

## 6. Trabalhos Relacionados

Ao fazer uma pesquisa utilizando o Google você já percebeu que ele apresenta no topo as páginas da web mais relevantes sobre o assunto pesquisado? O motivo pelo qual isso ocorre é a existência de um algoritmo chamado Page Rank. Ele é mais uma aplicação das cadeias de Markov. Podemos encontrar mais detalhes sobre ele na dissertação de Magela (2015). Além desta, há a dissertação de mestrado em estatística de Mariana Pereira de Melo (IME/USP), 2009, sob título “Ordenação das páginas do Google - Page Rank”, que descreve com detalhes o algoritmo de busca.

Um trabalho também interessante sobre essa Teoria, que pode atrair a atenção dos alunos, é o de Sousa Júnior (2016), que fala sobre o Monopoly, um dos jogos de tabuleiro mais populares do mundo. Nesse artigo é analisada a dinâmica do jogo pelo modelo de uma Cadeia de Markov, utilizando como objeto de estudo uma versão mais simples do jogo em questão. Outros artigos

que podem servir como um complemento deste são *Cadeias de Markov: Uma aula para alunos do ensino médio*, de Rodrigues (2013), *Aplicações de Cadeias de Markov no Ensino Médio*, de Ramos (2017) e *Cadeias de Markov regulares: Uma abordagem para alunos e professores do ensino médio*, de Costa (2017).

## 7. Considerações finais

O artigo apresentado possui como objetivo mostrar aos alunos do ensino médio, de modo simples e direto, algumas aplicações das cadeias de Markov no cotidiano. É possível, ainda, ver neste trabalho a interação entre matrizes e probabilidade.

Apresentar cadeias de Markov pode causar um impacto positivo na aprendizagem dos alunos, e na prática de ensino do professor, pelo fato de revisar de forma enfática probabilidade e apresentar uma utilização de matrizes, mostrando que esse último não é apenas um conteúdo puramente teórico.

Portanto, visto como este surgiu, e a reconstituição do seu surgimento na Seção 5 através da análise feita no famoso soneto “Amor é fogo que arde sem se ver”, de Luís Vaz de Camões, fica claro que o mesmo abrange áreas diversas do conhecimento que possuem uma certa atribuição de probabilidade, cujos eventos futuros dependem apenas do evento imediatamente anterior. Pensando nisso, uma sugestão de um possível trabalho após a exposição desse tema seria propor aos alunos a análise de textos ou obras literárias. Isso poderá proporcionar o trabalho conjunto entre os professores de português e matemática, sendo o primeiro responsável por indicar as obras para leitura e o segundo pela orientação da análise probabilística dessas.

Poderíamos realizar o trabalho supracitado através de oficinas. Então, como um trabalho futuro, poderíamos verificar com um pré-teste e um pós-teste se houve uma melhora no ensino de probabilidade e matrizes após essas oficinas, e apresentar o resultado de tal pesquisa em um artigo.

## Referências

- [1] BERNARDES, O. *Para uma abordagem do conceito de probabilidade*. Educação e Matemática, Lisboa, n° 3, 1987.
- [2] CAMÕES, Luís de. *Lírica*. São Paulo, Edusp, 1982.
- [3] COSTA, Fábio de Souza. *Cadeias de Markov regulares: Uma abordagem para alunos e professores do ensino médio*. 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.
- [4] JULIANELLI, José Roberto. *et al. Curso de Análise Combinatória e Probabilidade*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.
- [5] LIPSCHUTZ, Seymour. *Probabilidade*. Tradução Rutth Ribas Itacarabi. 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1993.
- [6] MAGELA, Mateus Mendes. *Teoria básica das cadeias de Markov*. 2015. 112 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Vitória, 2015.
- [7] MEC. *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. Secretaria de Educação. Brasília: MEC, 2018.

- [8] MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática/Secretaria de Educação. Brasília: MEC, 1999.
- [9] MEDEIROS, Sérgio da Silva. *Cadeias de Markov ocultas*. 2017. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.
- [10] MELO, Mariana Pereira de. *Ordenação das páginas do Google - Page Rank*. 2009. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Instituto de Matemática e Estatística) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [11] NOGUEIRA, Fernando. *Modelagem e Simulação - Cadeias de Markov*. Notas de aula, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/cadeiaMarkov1.pdf>>. Acesso em: 26 de setembro de 2019.
- [12] OLIVEIRA, Amanda Silvieri Leite de; RIBEIRO, Thaís Saes Giuliani; SILVA, Fabiano Borges da. *Cadeia de Markov: modelo probabilístico e convergência das distribuições de probabilidade*. Revista Eletrônica Paulista, São Paulo, v. 11, pp. 50 – 61, dez. 2017.
- [13] RAMOS, Yuri Tobias Aquiel Correa. *Aplicações de Cadeias de Markov no Ensino Médio*. 2017. 53 F. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2017.
- [14] RODRIGUES, Welton Carlos. *Cadeias de Markov: Uma aula para alunos do ensino médio*. 2013. 44f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- [15] SOUZA JUNIOR, Fernando Luiz de. *Cadeias de Markov e o Jogo Monopoly*. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016.

Alicia Maria do Nascimento Amorim  
Universidade Federal do Piauí - UFPI  
<[aliciaamorim14@gmail.com](mailto:aliciaamorim14@gmail.com)>

Anna Karla Barros da Trindade  
Instituto Federal do Piauí - IFPI  
<[anna.trindade@ifpi.edu.br](mailto:anna.trindade@ifpi.edu.br)>

Francisco de Paula Santos de Araujo Junior  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI  
<[pjhatata@hotmail.com](mailto:pjhatata@hotmail.com)>

Recebido: 26/11/2019  
Publicado: 19/06/2020