PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.1, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo83

O sonho de Lagrange

José Carlos Magossi

Resumo

É comum dizer que os cursos de Cálculo são por demais teóricos e, desse modo, geram insatisfação em seus estudantes. O objetivo deste artigo é indicar que, dentre os vários motivos que acarretam essas dificuldades e desagrado, aqueles voltados ao não entendimento da *aritmetização da matemática*, frase de Felix Klein no século XIX, são os mais relevantes. Tal alegação fundamenta-se na percepção das dificuldades erigidas no decorrer do árduo processo histórico que culminou com o rigor na matemática. Entende-se que dificuldades semelhantes podem ocorrer com estudantes que ascendem à Universidade sem um preparo adequado ao manuseio dessa *nova aritmética*. Neste artigo exibem-se exemplos *divisores de águas* entre a aritmética do colégio e a aritmética presente em cursos de Cálculo. Estima-se que o estudante, ao ser-lhe esclarecido que o curso de Cálculo está alicerçado nessa nova aritmética, possa dirimir esforços do pensamento voltado à aritmética do colégio para lançá-lo na compreensão do processo de aritmetização da matemática. Caso contrário, ele pode entender que, no curso de Cálculo, a aritmética do colégio, além de necessária, seja também suficiente.

Palavras-chave: Aritmetização da matemática; Lagrange; Cálculo; Infinitésimos; *Continuum*; Funções.

Abstract

It is common to say that Calculus courses are too theoretical and thus they cause dissatisfaction in their students. The aim of this article is to indicate that, among the various reasons that cause these difficulties and displeasure, those related to misunderstanding the *arithmetizing of mathematics*, phrase coined by Felix Klein in the XIX century, are the most relevant. This claim is based on the perception of the difficulties erected in the course of the arduous historical process that culminated with rigor in mathematics. We think that similar difficulties may occur with students ascending to the University without adequate preparation for handling this *new arithmetic*. In this article we show examples that can be seen as *water divisors* between High School arithmetic and the arithmetic present in Calculus courses. We estimate that, when it is clarified to the student that the course of Calculus is based on this *new arithmetic*, he can so settle efforts of thought focused on the mathematics of High School to launch it in understanding the process of the arithmetizing of mathematics. Otherwise he may understand that, in the course of Calculus, the High School arithmetic is not only necessary, it is also sufficient.

Keywords: Arithmetizing of mathematics, Lagrange, Calculus, Infinitesimals, *Continuum*, Functions.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1. Introdução

Os estudantes tomam contato, logo que iniciam seus estudos em matemática, com as regras básicas de soma, subtração, divisão e multiplicação para números inteiros. Uma simples inspeção nos conteúdos matemáticos dos colégios será suficiente para identificar os assuntos em que residem suas dificuldades com essas operações. Tais dificuldades de aprendizado produzem, na comunidade científica, inúmeros artigos com fins de indicar metodologias que facilitem o entendimento dessas operações em detrimento, por exemplo, de uma possível tarefa de decorar a tabuada. Um pouco à frente nesse roteiro escolar reside ainda uma dificuldade maior, as operações com frações. Uma fração é um número ou são dois números? Representa razão ou variação? Estes são alguns questionamentos presentes em sala de aula. Isso se estende até o ensino médio, período em que os estudantes estão prestes a ingressar em cursos universitários. Ao ingressar em tais cursos, naqueles que contenham como disciplinas obrigatórias os "famosos" cursos de Cálculo, haverá outra dificuldade, ainda da aritmética, mas não com números inteiros ou frações, mas com o que se chama, *grosso modo*, de *quantidades infinitamente pequenas*[1], abreviada nesse artigo por `q.i.p.` Essa aritmética é a que suporta, em termos técnicos, as ferramentas matemáticas de grande parte dos desenvolvimentos tecnológicos modernos, tais como as equações diferenciais, equações integrais, séries e transformadas de Fourier etc. Mesmo com todas as indicações da relevância tecnológica, educativa e de raciocínio, da matemática presente nos cursos de Cálculo, há ainda indicativos de insatisfação. Pode-se dizer que há, de modo geral, uma leitura de desconexão entre matemática e realidade. Talvez isso seja fruto do árduo processo de transformação e solidificação da matemática ao longo dos séculos `XVII, XVIII` e `XIX.` Pelo sim ou pelo não, o fato é que há um cenário fragmentado nos cursos de Cálculo que faz com que os estudantes sintam-se desconfortáveis. A história da matemática mostra-nos o quão árduo foi, e em alguns casos ainda é, a passagem do período pré-Cálculo - [2] diga-se, antes da invenção do conceito de *derivadas* - para o período do Cálculo, motivada pela *intuição geométrica,* e também a passagem do período do Cálculo para o período das análises Matemáticas, com a invenção do conceito de *limites* e aprimoramento do conceito de *funções.* Os termos "derivadas", "intuição geométrica", "limites" e "funções"não são os únicos fatores que acarretaram transformações matemáticas naquele período, mas servem como elemento norteador para lançar uma luz sobre as dificuldades presentes nos cursos de Cálculo.

Uma observação cautelosa mostra-nos os equívocos dos cientistas em optar por "demonstrações" matemáticas fundamentadas em intuição geométrica, descobrindo-se apenas *a posteriori* que o rigor dedutivo deveria predominar se se quer evitar inconsistências [39]. As profundas discussões sobre `q.i.p.`, infinitésimos, indivisíveis, estrutura do *continuum* etc., [41, 1], atingem um ponto de consenso no final do século `XIX` com o surgimento do conjunto dos números reais, em que a estrutura do *continuum* revela-se num sistema lógico dedutivo com a inserção de axiomas de completude.

,

> *(...) Nesse contexto seria interessante e importante saber das várias análises a que foi submetida a noção de* continuum *ao longo dos séculos (e milênios) ([31], p214). (Tradução do autor).*

Com fins de elucidar as transformações relativas às `q.i.p.`, propõe-se, neste artigo, uma divisão

[1]Para mais detalhes sobre esse termo, no sentido extensivo, consultar, por exemplo, [1, 2].

[2]O termo "pré-Cálculo" é utilizado aqui como sinônimo de um período histórico e não como a pretensa disciplina, pretenso pré-requisito, que comumente se diz preparatória para ingressar em cursos de Cálculo.

histórica com três períodos, caracterizados, aproximadamente, pelas datas de 1684 – 1687, 1807 – 1823 e 1902, como marcadores de época. Os anos de 1684 e 1687 caracterizaram o surgimento do Cálculo. O ano de 1807, (mês de dezembro), foi o ano em que Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) entregou ao *Institut de France,* [25], Paris, seu manuscrito sobre a solução do problema de Condução de Calor[3]. Os anos de 1821 e 1823, [16, 17], foram os anos da publicação do conceito de *limites* por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). E, finalmente em 30 de junho de 1902, a data da defesa de doutorado de Henri Léon Lebesgue (1875-1941), que pode ser vista como um marco no desenvolvimento de uma genuína teoria da integração e medida [34][4].

Entende-se que houve o período pré-Cálculo (antes de 1684 e 1687), o período do Cálculo, até 1807, e o período da solidificação da Análise Matemática, até 1902. De 1902 aos dias atuais, muitos desenvolvimentos matemáticos ocorreram, o que é impossível detalhar num texto como este. Neste artigo, apontamos que em tais períodos, o foco reside no problema da aritmética, não numa aritmética de números inteiros, mas sim numa aritmética de `q.i.p.`, ou seja, em linguagem moderna: uma aritmética de números reais. Convém reforçar que o objetivo neste artigo é indicar as bruscas mudanças no pensar sobre o *conceito de infinito e infinitésimos* que, de uma forma ou outra, impactaram não somente o pensamento humano dos séculos `XVII, XVIII` e `XIX`, mas também impactam o pensamento e o raciocínio daqueles que ingressam em cursos de Cálculo. É possível, então, caracterizar, de modo sucinto, conforme a proposta deste artigo, as principais "ferramentas" matemáticas utilizadas nos períodos citados acima:

- Da Grécia antiga até 1684-1687 as "ferramentas" matemáticas utilizadas eram, *grosso modo*, Régua e Compasso. A geometria de Euclides, exposta no livro *Os Elementos*, de Euclides [8], reúne um dos principais tratados de matemática.
- De 1684 até 1807-1823 as "ferramentas" matemáticas eram fundamentadas fortemente em derivadas e integrais, de Newton-Leibniz. Esse foi um período de intuição e geometria. *O Cálculo* descoberto por Newton e Leibniz era a principal vertente matemática.
- De 1807-1823 até 1902, o conceito de limites estabelece-se como uma importante "ferramenta" matemática. O período do rigor. A *Análise Matemática* solidifica-se e os fundamentos da matemática são revistos.
- De 1902 até os dias de hoje há uma pluralidade de novos desenvolvimentos matemáticos, mas ainda o conceito de limites mostra-se como uma ferramenta indispensável na matemática.

Na Grécia antiga, por exemplo, já se discutiam as magnitudes além daquelas inteiras e fracionárias. Pitágoras questiona a existência do número $\sqrt{2}$. Euclides mostra a impossibilidade de esse número ser expresso como uma razão entre dois números inteiros, com denominador diferente de zero; ou seja, não é um número que pertence ao conjunto das frações. Euclides publica uma série de livros, *Os Elementos*, [8], nos quais enuncia seu método axiomático-dedutivo, amplamente utilizado em quase todos os círculos de estudiosos em matemática. O axioma das paralelas, que consta nos *Elementos de Euclides*, mostra indicativos de como o trato com o *infinito* pode gerar controvérsias. Ainda em sua época, dúvidas sobre `q.i.p.` em geometria persistiam. Por exemplo, *se um segmento de reta é composto de partes muito pequenas (mas positivas), em número infinito, então sua soma,*

[3] O qual originou o que se chama hoje em dia de Séries de Fourier.

[4] Essa data é utilizada apenas para marcar um período, pois Lebesgue publicou seus resultados ao longo do final do século `XIX` e início do `XX` [35, 27, 3, 45].

uma soma infinita, vai ultrapassar o tamanho do referido segmento. Por outro lado, se esse mesmo segmento é formado de partes infinitamente pequenas (mas de tamanho nulo), então sua soma vai ser nula e não representará o segmento. Isso mostra as inconsistências acerca de somar `q.i.p.` Além disso, há também os paradoxos de Zenão de Eleia (que viveu por volta de 450 A.C. [12, 1]), que revelam como um dos precursores dos processos relacionados ao infinito [42]. Em linguagem atual, a ideia de Zenão era a de que é impossível ir, por exemplo, de um ponto A até um ponto B qualquer. Para chegar a B é preciso passar pela metade do caminho, digamos C, e daí, para ir de C até B, é preciso passar pela metade do caminho restante, e assim sucessivamente. Nesse caso, levando-se em conta que sempre há uma mínima parte a percorrer (uma metade), jamais se atinge o ponto B. Zenão utiliza em sua argumentação um raciocínio que pode muito bem ser comparado, guardadas as devidas proporções, aos raciocínios do século `XIX`. Também, pode-se citar O. Toeplitz (1881-1940) ao dizer de Arquimedes, após seu livro *O método* ter sido descoberto por J. L. Heiberg (1854-1928), em 1906, na cidade de Constantinopla:

,

> *Neste trabalho Arquimedes não fornece nenhuma nova prova, apenas quer mostrar por quais métodos de raciocínio ele tem encontrado todos os seus grandes resultados; (...). O método dos indivisíveis, que ele, no entanto, lida com uma ousadia e segurança instrutiva que deixa Cavalieri muito para trás ([42], p61). (Tradução do autor).*

Nota-se a força das ideias de `q.i.p.`, nesse caso sob a forma de *indivisíveis*, as quais desde há muito tempo "esboçava caminhos" para emergir. Essas discussões, com formatos diferentes [1], avançam até o período da descoberta do Cálculo. De modo revolucionário, se assim se pode dizer, I. Newton (1643-1727) e G. Leibniz (1646-1716) abordam esse problema de forma singular. Eles caracterizam essas `q.i.p.` como sendo quantidades (sem dimensão) menores do que qualquer outra quantidade, mas ainda diferente de zero.

,

> *(...) como uma quantidade menor do que qualquer quantidade finita e, ainda, diferente de zero ([31], p214). (Tradução do autor).*

Com isso, abrem-se espaços para desenvolvimentos matemáticos fundamentados no recém-descoberto "Cálculo". De modo quase imediato, novas "tecnologias" surgem, tais como a construção de telescópios, o conceito de velocidade instantânea na Física, inclinação de curvas, lei da gravitação, máximos e mínimos de funções etc., ([26], p.81). Além da explosão do surgimento do Cálculo, fortes desenvolvimentos surgem no patamar das técnicas de derivação, de integração e de suas aplicações. Inúmeros teoremas e suas interações com o mundo real são estabelecidos. No entanto, com o passar do tempo as fronteiras dessa abordagem, dessa relação teoria-prática, começam a dar sinais de "fadiga," haja vista que as demonstrações dos teoremas eram fundamentadas principalmente em evidências, numa factível prática e na intuição geométrica.

Já estava latente nos ares da época que a ausência de uma caracterização precisa do que sejam os infinitésimos promovia dúvidas em demonstrações matemáticas, pois a intuição e a geometria não eram suficientes para *demonstrações* de teoremas matemáticos, principalmente para aqueles associados à convergência de séries, continuidade, números reais, reta real etc.. Algo mais seria necessário. Não basta dizer que $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ vale 2 apenas por indicar que essa multiplicação representa a área de um quadrado[5] de lado $\sqrt{2}$.

De modo análogo, não basta dizer que a soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

vale 1, pois há uma leitura geométrica de fácil entendimento. Isto é, essa soma pode ser lida, de modo intuitivo, como a representação da área de um quadrado de lado 1 que foi dividido em 2 partes (regiões) iguais e retirada uma parte dela: $\frac{1}{2}$. Depois, divide-se o quadrado em 4 partes iguais e retira-se uma parte de quatro, $\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente, subdivide-se o quadrado em 2^n partes iguais e retira-se uma parte de 2^n partes, ou seja, $\frac{1}{2^n}$. Intuitivamente, essa soma vale 1, que é a área do quadrado, pois vão-se retirando partes cada vez menores, mas ainda pertencentes ao quadrado de área 1. Com um terceiro exemplo, seja uma reta r que liga o ponto A ao ponto B. Seja também uma reta s transversal a ela. Intuitivamente é de bom senso supor que a reta s corta a reta r em algum ponto, mas qual a certeza disso? Esse problema foi discutido por Bernard Bolzano (1781-1848) [40] e deu origem ao que se chama hoje em dia de *Teorema do Valor Intermediário.*

Em todos os três exemplos acima as dúvidas advêm do **significado** de que se atribuem ao **significante** *quantidades infinitamente pequenas.* No primeiro exemplo, o problema está relacionado à multiplicação de um número com infinitas casas decimais por ele mesmo, caso em que a aritmética tradicional não se aplica. No segundo exemplo, de modo análogo, indica-se uma soma de infinitos termos, contrária à noção de soma que é definida para um número finito de termos. Já no terceiro exemplo, a dúvida reside na existência, ou não, de um ponto de interseção entre duas retas, condição possível, desde que não haja "furos" nas retas envolvidas. Isso indica a presunção de que as retas em questão contenham, como seus pontos, o conjunto de números reais[6]. *Grosso modo*, caso exista tal "reta real", haverá um ponto de interseção entre as retas r e s; caso contrário, os "furos" podem não garantir a interseção. Com base nessas argumentações e em muitas outras possíveis, os problemas com a falta de rigor começam a surgir, e os matemáticos voltam-se para as questões de fundamentos da matemática[7].

,

> *E assim, no final do século* XVIII*, à medida que as limitações das antigas técnicas tornaram-se cada vez mais evidentes, uma atenção séria às questões dos fundamentos tornou-se a preocupação de* trabalho *dos matemáticos ([38], pviii). (Tradução do autor).*

Richard Dedekind (1831-1916) inquieta-se com a falta de precisão na matemática ao lecionar cursos de Cálculo em Zurich. Em seu livro de 1858, [20], *Essays on the theory of numbers-Continuity and Irrational Numbers-The Nature and Meaning of Numbers*, escreve sobre sua insatisfação com o desenvolvimento do Cálculo no decorrer de suas aulas:

,

[5]Um quadrado justaposto por quatro triângulos retângulos iguais, de área $\frac{1}{2}$, catetos com valor 1 e hipotenusa, lado do quadrado, igual a $\sqrt{2}$.

[6]Nota-se que esses questionamentos surgiram bem antes o do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais tal como conhecemos hoje em dia.

[7]No artigo *Les fondements des mathématiques,* Morris Kline elucida essa problemática [32].

> *Ao discutir a noção da abordagem de uma magnitude variável para um valor limite fixo, (...), tive de recorrer à evidências geométricas. (...) Para meu próprio sentimento de insatisfação (...). Eu deveria encontrar uma base puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise infinitesimal ([20], pp1-2). (Tradução do autor).*

As inquietações de Newton e Leibniz acerca do Cálculo, do conceito de infinitésimos, levam a Academia de Berlin, em 1784, a propor, por sugestão de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), um prêmio para o melhor trabalho matemático que explicasse os fundamentos do Cálculo. Havia certo consenso entre os matemáticos de que eles estavam clamando por algo "que ainda não existia". O prêmio, seguindo os dizeres do comitê de avaliação, "o melhor dos piores", foi atribuído a Simon L'Huiller (1750-1840) pelo trabalho *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs,* de 1787 ([23], p.233), mas ele não explicou o porquê de muitos teoremas verdadeiros serem deduzidos de suposições contraditórias ([23], pp40-42)[8]. Isso justifica a dificuldade em aceitar, e compreender, as `q.i.p.`, e grandes, "o infinito," presentes no Cálculo. Diante de uma "grave" situação na matemática, Lagrange abraça um projeto pessoal que consistia em eliminar os infinitésimos do Cálculo e reduzi-lo à Álgebra. Lagrange, por conta de suas aulas na École Polytechnique, em Paris, refletiu seriamente sobre a utilização de infinitésimos como parte dos fundamentos da matemática[9]([23], p43). Lagrange considerava que infinitésimos, de um modo geral, não eram rigorosos, mas, pelas dificuldades matemáticas encontradas, acaba por abandonar seu projeto de reduzir o Cálculo à Álgebra. No entanto, conforme consta em [23], mesmo Lagrange não tendo tido sucesso em seu programa de reduzir o Cálculo à Álgebra, ele deixou as condições necessárias e a importância vital da questão do rigor, para que Cauchy pudesse fazê-lo.

Coube então a A. L. Cauchy, quando em seu curso de Análise em 1821-1823 na École Polytechnique, Paris, introduzir o conceito de *limites* e dessa forma dar início a uma rigorosa fundação da Análise Matemática.

Com o operador *limites* no Cálculo há a revelação de uma nova aritmética. Se Lagrange e seus contemporâneos tiveram dificuldades para entender as `q.i.p.` no Cálculo, tendo sido Cauchy aquele que abriu as portas para uma compreensão eficaz, por que então estudantes iniciantes em cursos universitários deveriam compreendê-los com apenas uma aritmética de colégio como pré-requisito? Por isso se diz do *Sonho de Lagrange*, do sonho de indicar, talvez com vistas ao ensino, tal como se preocuparam, cada um com seu propósito, Lagrange e Cauchy, uma maneira clara para compreender as sutilezas de uma nova aritmética, uma aritmética com infinitésimos, com `q.i.p.`, e grandes. Ou seja, estima-se que, ao clarear a diferença entre os processos de aritmética básica de colégio, com números inteiros, e os processos de aritmética, com `q.i.p.`, presentes em cursos de Cálculo, haverá melhorias nos processos de ensino-aprendizagem. O aluno finaliza o ensino médio tendo adquirido um instrumental matemático, *grosso modo*, pertencente ao século `XVII`, e ao iniciar a Faculdade depara-se com uma matemática do século `XVIII`, mas como ferramental do século `XX`. Desse modo, é didático clarear ao aluno sobre as dificuldades em se trabalhar, no sentido manual-operacional, com uma aritmética de `q.i.p.`, mesmo tendo ele vivenciado operações, no

[8]O trabalho de L'Huiller, *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris,* de 1795, pode ser encontrado no *site* https://archive.org/details/principiorumcal00huigoog/ (Acessado às 17:15 do dia 28 de setembro de 2019).

[9] Os questionamentos de Lagrange propiciam a formulação de perguntas pertinentes ao tema discutido neste artigo: Seria a presença da álgebra no Cálculo, de certa forma, uma facilitador do ensino, muito mais do que o manuseio de infinitésimos? Por conta de suas aulas, haveria Lagrange refletido sobre isso?

colégio, com a aritmética de números inteiros. É preciso ir além de simples manipulações de números inteiros, além das transformações de "conceitos intuitivos" do Cálculo para "conceitos rigorosos" da Análise Matemática.

2. A época do rigor matemático

A prática, intuição e geometria dominavam o período imediato ao surgimento do Cálculo, mas a ocorrência de imprecisões na matemática fez com que houvesse um movimento em direção aos fundamentos da matemática. Como consequência, a Análise Matemática solidificou-se e o Cálculo afastou-se dos aspectos intuitivos para se pautar em processos aritméticos como meio de responder às insatisfações científicas da época. Na sequência histórica, após Cauchy, outros matemáticos trabalharam nos fundamentos da matemática, tais como: K. Weierstrass (1815-1897), G. Cantor (1845-1918), E. Heine (1821-1881), E. Borel (1871-1956), C. Méray (1835-1911), B. Bolzano (1781-1848), R. Dedekind (1831-1916), P. Cousin (1867-1933) e H. Lebesgue (1875-1941), para dizer de alguns [26, 24, 12, 36, 29, 41]. Na trilha desses desenvolvimentos, R. Dedekind constrói o conjunto de números reais e caracteriza uma reta "real" composta unicamente por números reais e possibilita com isso as definições e construções rigorosas de teoremas, comuns em cursos de Cálculo. Surgem então demonstrações rigorosas, inclusive para aqueles teoremas que, anteriormente, eram "demonstrados" via intuição geométrica. O final do século `XIX` e início do `XX` foi marcado pelo desenvolvimento da precisão na matemática, ou seja, pela migração matemática da era da intuição para a era das demonstrações precisas fundamentadas na aritmética. Esse período, fértil em termos matemáticos, foi caracterizado por Felix Klein (1849-1925) como o período da *aritmetização da matemática* [30, 39].

,

> *Proponho, portanto, na presente ocasião explicar a minha posição em relação a uma importante tendência matemática que tem como seu expoente principal Weierstrass, cujo octagésimo aniversário recentemente comemoramos. Eu me refiro à* aritmetização da matemática *([30], p241). (Tradução do autor).*

A ideia de Klein é mostrar com essa frase que uma nova aritmética surgia, qual seja, a aritmética de `q.i.p.`, uma aritmética dos infinitésimos[10]. Os cientistas desse período, além de Newton e Leibniz, trataram os infinitésimos de modo único [2], bem diferente do modo como as `q.i.p.` vinham sendo abordadas desde então por B. Cavalieri (1598-1647), Galileu Galilei (1564-1642), J. Wallis (1616-1703) etc. [1, 12]. Isso produz uma aritmética cujos objetos diferem daqueles cotidianamente utilizados no ginásio e colégio, em que a aritmética insere-se no escopo de operações com números inteiros e frações. Ao construir os números reais, R. Dedekind deixa o caminho livre para que novas construções e desenvolvimentos ocorram. Assim, o conjunto dos números reais, juntamente com as quatro operações, satisfazendo os axiomas de corpo e de completude, caracteriza-se como o *sistema de número reais* [5].

No entanto, essa caracterização do sistema de números reais não deu-se apenas por instabilidades nas demonstrações matemáticas alicerçadas na intuição geométrica. O trabalho de Fourier sobre Condução de Calor pode ser caracterizado como um "divisor de águas" [13]. Graças aos problemas

[10]Foi com a busca por uma aritmética desse tipo, mesmo que incipiente, que se deu o surgimento do Cálculo por Newton e Leibniz, uma consequência indireta das investigações originadas na Grécia antiga.

"abertos", deixados no trabalho de Fourier, a matemática foi, por assim dizer, "convidada" a se tornar mais sólida [42].

O fim das interrogações presentes no trabalho de Fourier de 1807 se deu com os trabalhos de H. Lebesgue [27], em particular com sua tese de doutorado [34] em 1902. Nela, Lebesgue exibe uma *teoria de medida e integração*, a qual responde às interrogações presentes no trabalho de Fourier. É evidente que, com isso, novas tecnologias surgem e a matemática solidifica-se. O período após 1902 utiliza dessas novas ferramentas para inovações tecnológicas e também para responder ainda a outros problemas decorrentes dessas novas ferramentas. É o caso da teoria da integração, a qual indica novos métodos de integração que abrangem uma classe maior de funções [33, 28, 22], e também impacta propostas pedagógicas voltadas às melhorias nos processos de ensino-aprendizagem[11]. Essas discussões acabam sendo interessantes, pois estão em consonância com um dos motivos que podem também ser ditos como motivadores da transição da era da intuição para a era do rigor: *o ensino do Cálculo* [24, 36, 29].

Os séculos XVIII, XIX e XX caracterizaram-se, sob a ótica da matemática, por períodos de grandes mudanças e solidificação da matemática, e contêm as datas que, neste artigo, indicam divisores de água no desenvolvimento da matemática focada numa aritmética que se alterou significativamente em três períodos históricos. O esclarecimento dos aspectos históricos, dos desenvolvimentos tecnológicos, da evolução dos conceitos matemáticos é uma condição essencial nas propostas pedagógicas associadas ao ensino de Cálculo e quiçá da Análise Matemática.

É um fato histórico que o **ensino** foi considerado com uma séria preocupação tanto de A. Cauchy como de R. Dedekind e de F. Klein, entre outros [11, 24, 36, 29, 41]. Assim, não é redundante alertar, diante do exposto em parágrafos anteriores, que melhorias no ensino de Cálculo podem advir de esclarecimentos sobre a aritmetização da matemática. Com isso, estima-se que o aluno visualizará a diferença entre o mundo de *realidades discretas* e o mundo da matemática imerso em quantidades *incomensuráveis*, em infinitésimos.

O ensino do Cálculo sob a ótica de intuição e geometria é pedagogicamente viável, mas com os desenvolvimentos atuais, com as tecnologias, com os *softwares*, em muitos casos, faz-se necessário tratar o Cálculo tanto com rigor como com intuição geométrica.

3. Exemplos ilustrativos

No que se segue, expõem-se exemplos matemáticos que marcam a diferença entre uma aritmética presente em cursos colegiais e a aritmética presente em cursos de Cálculo. O objetivo é mostrar que o **pensar** sobre infinitésimos deve ser esclarecido aos estudantes. Nos poucos exemplos que se seguem mostra-se que o pensar matemático, se desprovido de contexto em que a gênese do conceito é explorada, pode facilmente gerar dúvidas e dificultar a compreensão dos conceitos próprios do Cálculo.

[11] Ver texto de Eric Schechter no endereço https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/, que diz sobre as integrais de Kurzweil-Henstock, e também sobre a divulgação dessas integrais no endereço https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/letter/(acessado no dia 28 de setembro de 2019 às 18:26).

3.1. Aritmética de quantidades infinitamente pequenas

A palavra *aritmética*, em dicionários e enciclopédias, relaciona-se aos números e às operações com eles. A expressão $2+3=5$ é vista como uma igualdade em que a quantidade expressa por $2+3$ é igual à quantidade expressa pelo número 5. No entanto, o que acontece com expressões tais como

$$0,9+0,99+0,999+0,9999+\ldots,$$

que representam uma "soma" de infinitos números, a qual pode ser a resposta para a pergunta:

$$1=0,999\ldots\ ?$$

Ou ainda, somas do tipo $\pi+e$, ou a multiplicação $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$, as quais o resultado poderia ser obtido, em tese, no sentido tradicional, após operar com números com infinitas casas decimais. Como não se tem como realizar operações matemáticas em um número infinito de passos, uma leitura imediata revela uma *incerteza* acerca do resultado das expressões acima.

Felix Klein, ao escolher a frase "aritmetização da matemática" [30], contempla o pensamento matemático que está presente nas demonstrações matemáticas via epsilons ($\varepsilon's$) e deltas ($\delta's$). Isso se opõe àquelas demonstrações caracterizadas pela intuição geométrica, as quais, às vezes, eram expostas em poucas palavras de bom senso [39]. A essência dessas sutilezas presentes nessa nova aritmética pode ser observada no seguinte exemplo da famosa série harmônica. Ela é uma "soma infinita" de termos do tipo $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ .$$

Há inúmeras demonstrações de sua divergência ([5], pp96-97), ou seja, de que essa "soma infinita" cresce indefinidamente. Por exemplo, com 10.000 termos tem-se o valor aproximado de $9,78$; com 100.000 termos tem-se o valor aproximado de $12,09$. Ao estudar séries numéricas, depara-se com a série $p-$ harmônica, uma versão estendida na qual a série harmônica é um caso particular.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots. \tag{1}$$

É clássico e demonstrado na literatura, que, se $p=1$, a série harmônica é divergente; se $p>1$ a série converge, e para $0<p<1$ a série diverge. A exemplificação da presença das `q.i.p.` pode facilmente ser observada ao se trabalhar com valores de p muito próximos de 1. Sabe-se que, se p é muito próximo de 1, mas ainda maior do que 1, a série é então convergente.

$$\lim_{p\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=k, \qquad \text{para algum } k\in\mathbb{R}.$$

Isso é muito estranho e muito esclarecedor do estudo dessas `q.i.p.` Se $p=1+10^{-10000000}$, diga-se, um número maior do que 1, e muito, muito próximo mesmo de 1, a "soma infinita" (1) tem um valor fixo, ou seja, é convergente. Mas, para $p=1$ a soma "explode para infinito," diverge. Haverá dificuldades de entendimento desse raciocínio sobre somas infinitas se se pautar apenas na aritmética de colégio que ele, o estudante, conhece ao chegar à universidade.

3.2. Conjuntos

Logo nas primeiras aulas de um curso de Cálculo o foco são conjuntos numéricos. Os conjuntos dos números Naturais $\mathbb{N}$, Inteiros $\mathbb{Z}$, Racionais $\mathbb{Q}$, Irracionais $\mathbb{I}$ e Reais $\mathbb{R}$, que de certa forma já são de conhecimento dos estudantes. No entanto não são exploradas no ginásio e colégio as particularidades do trato com conjuntos infinitos. Há dúvidas quanto à pergunta: qual conjunto tem mais elementos, o conjunto dos números pares P ou o conjunto $\mathbb{N}$? Em conversas com estudantes, observa-se que, em uma primeira análise, dizem que dois conjuntos infinitos têm sempre o mesmo número de elementos. Numa segunda análise, dizem que $\mathbb{N}$ tem mais elementos que P. Numa terceira análise, a resposta é que são iguais, não porque são infinitos, mas porque é possível "grudar" cada número com seu múltiplo de 2. Esse já é um primeiro sinal de dificuldade com uma aritmética (de "coisas infinitas") diferente daquela tratada no colégio. Nota-se a importância em esclarecer, de modo didático, as ideias iniciais, clássicas, sobre conjuntos, enumerabilidade, contagem, cardinalidade etc. Conforme exposto em [19], página 4, Galileo Galilei foi um dos pioneiros na elaboração de uma proposta do *infinito* tal como nos tempos atuais. Mesmo para Galileo, era um paradoxo dizer que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados de números naturais têm o mesmo número de elementos.

O livro *Computability and Logic*, de G. S. Boolos (1940-1996) e R. C. Jeffrey (1926-2002) [10], traz boas explicações sobre esses assuntos nos capítulos iniciais. De extrema importância é indicar o norte histórico associado ao surgimento de um conceito. Neste caso, os trabalhos de Georg Cantor são relevantes, pois não só indicam a parte histórica relativa a conjuntos, como também preanunciam a relação entre conjuntos e a participação do pesquisador G. Cantor nos fundamentos da Análise Matemática [6]. A teoria de conjuntos de Cantor foi criada no período histórico em que se investigavam problemas relacionados a conjuntos infinitos. Cantor estudava séries infinitas e procurava resolver os problemas deixados por J. Fourier em suas séries. As descobertas de Cantor dos conjuntos infinitos [6] foram significativas não só para os fundamentos da Matemática, mas também para o surgimento da teoria de integrais de H. Lebesgue [3]. Ao se clarear esse assunto e citar exemplos do porquê do surgimento de uma aritmética com conjuntos infinitos, torna-se possível compreender com mais facilidade os assuntos que se apresentam na sequência do cronograma, ementa, de um curso de Cálculo. Isso elimina uma tentativa muito comum de associar a matemática que se aprende com situações do mundo real, uma constante busca por uma "matemática aplicada". Em alguns casos isso pode não funcionar. Por exemplo, questionar o conceito de infinito no mundo em que se vive pode ser mais enroscado do que expor as razões do surgimento dessa aritmética do infinito.

Um exemplo que não se apresenta no colégio e que pode ser esclarecedor sobre conjuntos infinitos é o de determinar uma função que seja bijetora e que enumere todos os pares de números inteiros. Como ela é bijetora, existe a função inversa, que associa um número inteiro com um par de números inteiros, algo novo para os estudantes. O entendimento de uma função com essas características, e de sua inversa, auxilia no esclarecimento sobre enumerabilidade de conjuntos.

Exemplo 1. ([18], pp40-41 e p73) Se g é uma função bijetora de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ dada por

$$g(a, b) = 2^a(2b + 1) - 1,$$

então sua inversa g^{-1} é dada por

$$g^{-1}(x) = \left((x+1)_1, \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)}{2^{(x+1)_1}} - 1 \right) \right),$$

onde a notação $(x+1)_1$ vem da função

$$(x)_y = \begin{cases} A, & \text{se } x, y > 0 \\ \\ 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases},$$

onde A é o expoente de p_y na fatoração de números primos[12] de x.

3.3. Funções

Um dos principais conceitos em matemática, o conceito de funções, é normalmente apresentado, em cursos de Cálculo, logo após a exposição de conjuntos numéricos. Esse conceito alterou-se ao longo da história da matemática; o que se entendia por funções no século XVII não é o mesmo que se entendia por funções no século XIX, nem o mesmo que se entende por funções nos dias de hoje. Dessa forma, não é de espantar que a sala de aula capte também o eco de tais instabilidades.

Entende-se, com base no desenvolvimento da matemática, que ao aluno devem ser fornecidas as ferramentas matemáticas, didáticas, necessárias à compreensão das diversas fases de transformação de um conceito. Principalmente a diferença entre o conceito de função no sentido geométrico e o conceito de função no sentido computacional. Segundo o matemático O. Toeplitz,

,

> *(...) Todo o século XIX foi necessário para desenvolver completamente ambas – função e expressão computacional – em conjunção com e independentemente uma da outra, cada uma de acordo com sua peculiaridade. Os pesquisadores de hoje têm ambas à sua disposição. Utilizam-nas separadamente ou em mútua interpenetração. Para o estudante, no entanto, é difícil mantê-las separadas; os livros que ele estuda não lhe dão ajuda suficiente, porque tendem mais a confundir em vez de aguçar a diferença ([42], p132). (Tradução do autor).*

Dizer de uma função como sendo uma *regra* que associa elementos de um conjunto de partida (domínio) a elementos de um conjunto de chegada (contradomínio) exibe um método computacional para calcular os valores de uma determinada função, aquela sujeita a uma regra. O sentido geométrico indica as funções vistas como curvas contínuas, suaves etc.

No entanto, os problemas começaram a surgir quando Fourier, em seu trabalho *La théorie analytique de la chaleur (1822)*, expõe funções que não são aquelas tradicionalmente estudadas no século XIX. São funções que carecem de uma análise cuidadosa, em que o sentido computacional e geométrico interagem. Isso vai exigir uma reformulação[13] do conceito de funções, o que culmina com a preocupação com os fundamentos da matemática [32].

,

[12] Nesse caso p_y é o $y-$ésimo número primo. Por exemplo, $p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$.

[13] O conceito de funções é um dos pontos que impactaram os fundamentos da Análise Matemática. Entre vários motivos que exigiram uma completa clarificação do conceito de função, podem-se citar os trabalhos de Fourier [13, 43, 27, 42].

> *Precisamente o que Fourier quis dizer com uma função arbitrária nunca ficou totalmente claro. Certamente ele queria admitir todas as funções que aparecem em problemas físicos (a configuração inicial de uma corda esticada, por exemplo), incluindo muitas que não poderiam ser dadas por uma única equação (ou expressão). Foi P. G. Dirichlet (continuando as investigações de Fourier) que deu a definição moderna de uma função (...) ([38], pxi). (Tradução do autor).*

Nota-se que, historicamente, os cientistas passaram por períodos de incertezas, as quais podem também, de modo semelhante, estar presentes nos egressos do colégio, pois esses estão acostumados com o conceito de funções exposto no sentido geométrico ou calculado via algum processo computacional. Mas, para avançar em cursos de Cálculo, tal como deu-se com o avanço da matemática, torna-se necessário o pensar sobre o conceito de função de modo mais abrangente.

A função de J. P. G. L. Dirichlet (1805-1859) ([26], p203) é um exemplo mais sofisticado de funções, pois é difícil, se não impossível, de ser esboçada no papel com lápis e régua.

Exemplo 2 (**Função de Dirichlet**)**.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in [0,1]$ um elemento $f(x)$ definido como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um número irracional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é um número racional} \end{cases},$$

Outro exemplo é a função proposta por A. L. Cauchy (1789-1857) em 1821 ([26], p203), que produz uma infinidade de oscilações ao redor da origem.

Exemplo 3 (**Função de Cauchy**)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in [0,1]$ um elemento $f(x)$ definido como:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tão intrigante quanto as funções de Dirichlet e de Cauchy está a função que estabelece uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e uma parte dele.

Exemplo 4 (**O todo e a parte**)**.** A função bijetora de números reais, $f : \mathbb{R} \to]-1,+1[$, associa a cada $x \in]-1,1[$ um e um único elemento

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \in \mathbb{R}.$$

Como essa função é bijetora, ela estabelece uma correspondência biunívoca entre o intervalo aberto $]-1,1[$ e o conjunto dos números reais, ou seja, o número de elementos de $\mathbb{R}$ é o mesmo que o número de elementos de uma parte própria dele, o intervalo $]-1,1[$. Isso pode gerar dúvidas ao pensar que o todo, o conjunto $\mathbb{R}$, é "igual" a uma parte do todo, $]-1,1[$, situação nada intuitiva.

Nota-se, nos exemplos anteriores, que se está diante de funções que diferem daquelas estudadas no ensino médio[14]. É preciso indicar as raízes que possibilitam a construção de uma matemática apropriada ao Cálculo. Com isso, começa-se a preparar para a aritmetização da matemática, conforme proposto por Felix Klein.

[14] No caso das funções expostas nessa seção, aconselha-se que sejam utilizados *softwares de matemática* para auxiliar em seus desenhos. Isso facilitará a visualização do comportamento dessa funções.

3.4. Limites

No livros de Cálculo, nos capítulos iniciais, expõe-se o conceito de limites, normalmente seguindo a ordem de exposição: conjuntos, limites, derivadas e integrais. É uma exposição contrária ao desenvolvimento histórico, haja vista que o conceito de limites começou a ser esboçado por A. L. Cauchy em seu curso na École Polytechinique, Paris, França, [16, 17], quando já havia desenvolvimentos sobre os conceitos de integrais e derivadas ([26], pv).

Segundo Judith V. Grabiner, a utilização do rigor em limites com $\varepsilon' s$ e $\delta' s$ deu-se primeiramente com Cauchy e depois com K. W. T. Weierstrass [24]. Isso justifica talvez o fato de o assunto limites ocorrer logo no início, nos livros de Cálculo. Mais ainda, segundo F. Klein, ao dizer da importância de limites no teorema do valor médio no Cálculo, escreve:

,

> *(...) nós julgamos Cauchy como o fundador do cálculo infinitesimal exato no sentido moderno ([31], p213). (Tradução do autor).*

Mas o conceito de limites é abordado, normalmente, nos cursos de Cálculo como se os conceitos de derivadas e integrais fossem "construídos" a partir deles. O que não deixa de ser verdade, pois não há como dizer dos trabalhos de limites de Cauchy sem dizer de continuidade, derivadas e integrais. No entanto, não foi assim na história da matemática, pois derivadas e integrais já existiam antes de Cauchy. Cauchy reformulou apropriadamente esses conceitos com base no conceito de limites.

Os livros [26, 36, 29, 41] contêm discussões sobre a origem desses desenvolvimentos e indicam, por exemplo, que a evolução desse conceito deu-se, entre outros motivos, pela preocupação pedagógica. Frase cunhada também por outros autores, como H. Lebesgue.

,

> *Henri Lebesgue, por outro lado, acreditava que Cauchy tinha iniciado seu programa de rigor na matemática principalmente por razões pedagógicas, (...) ([38], px). (Tradução do autor).*

O contexto histórico tem sua importância, pois facilita a visualização das dificuldades da construção de novos conceitos. Por exemplo, do conceito de limites tem-se, ainda com Cauchy, o conceito de continuidade, que vai avançar graças à associação entre a "reta real" e o conjunto dos números reais, feita por Dedekind em 1878. A exposição do conceito de limites sem uma contextualização histórica pode gerar um cenário fragmentado, sem uma razão de existência. O conceito de limites e a ideia de aproximação estão muito ligados.

Exemplo 5. O conceito de *vizinhança*, no domínio dos números reais, indica a ideia de aproximação. Ao se analisar o seguinte limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2},$$

percebe-se que há alguns problemas com relação ao valor $x = 2$ pois, nesse caso, o numerador de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ tende a zero e o denominador também tende a zero. Para analisar esse limite, deve-se analisar o que acontece na vizinhança do número 2, ou seja, para valores de $\delta > 0$ tais que

$x \in (2-\delta, 2+\delta)$ e $x \neq 2$. Se for possível fatorar o numerador e o denominador por $(x-2)$, então se tem como saber o que acontece na vizinhança de 2. Mais ainda, se for possível retirar "qualquer vestígio" de $(x-2)$, da expressão $\frac{x^2-4}{x-2}$ será possível entender o que acontece na vizinhança de $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Ou seja, a análise dá-se na vizinhança de $x = 2$, em valores infinitamente próximos de 2. Novamente, os resultados foram obtidos com raciocínio voltado às `q.i.p.`

O conceito de limites é importante, seja para um curso de Cálculo, seja para um curso de Análise, em que as noções de aproximação e aritmética de `q.i.p.` são parte integrante. É conveniente o entendimento do porquê do surgimento de limites, antes de iniciar os "truques" e operações com *limites*. Estima-se, assim, que expressões tais como, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a = b,$$

sejam mais fáceis de entender.

3.5. Derivadas

O conceito de *derivadas* é *um divisor de águas* na matemática, cujo ponto divisor é o surgimento do **Cálculo**. As implicações das descobertas de I. Newton e G. Leibniz revolucionaram a matemática. Seu surgimento advém da identificação, por parte de Newton e Leibniz, da definição do que eles entendiam, cada um a seu jeito, por `q.i.p.` Isso indica uma releitura singular, da parte deles, de um assunto que vinha sendo discutido desde a Grécia antiga [12, 1], e que em suas mãos impôs uma "revolução" na matemática. No entanto, ao iniciar um curso de Cálculo, toma-se contato com o conceito de derivadas definido a partir de limites. Não se quer dizer que as definições, tais como são apresentadas nos livros, estejam equivocadas. O que se quer dizer é que o contexto histórico deva ser explicado, para que seja possível perceber os motivos dessa "revolução", pois Newton e Leibniz sequer conheciam o conceito de limites[15], que surgiu mais de um século após a descoberta do Cálculo[16]. Se não se aprender com a história da matemática [44], corre-se o risco, no ensino de derivadas, de levantar questionamentos que podem gerar mais confusões que esclarecimentos. Interessantes são, por exemplo, as argumentações do filósofo George Berkeley (1685-1753) sobre os infinitésimos, numa época em que o conceito de limites ainda não havia sido inventado, [7]. O estudo da proposição de G. Berkeley, entre outras, é extremamente rico do ponto de vista educativo, haja vista que se abre espaço para importantes reflexões sobre a existência dos infinitésimos.

[15] Não se quer com isso dizer que as "origens" desse conceito não possam se relacionar com o "quociente de Newton", por exemplo, mas que, tal como é apresentado nos livros, esse conceito difere, em muito, das ideias daquela época. Por exemplo, as ideias presentes nos livros, tais como conjuntos de Cantor, integrais de Riemann, ponto de acumulação, ponto interior etc., não existiam naquela época.

[16] Esse é um ponto de extrema importância no Cálculo. Há a "revolução científica," relacionada à descoberta do conceito de derivadas e integrais (sem utilizar limites) por Newton e Leibniz. Mas há também uma outra "revolução científica" relacionada ao conceito de limites (que reescreve os conceitos de derivadas e integrais), desenvolvido por Cauchy. É muito bem possível dizer que não há matemática sem essas duas revoluções. Ambas as revoluções configuram leituras particulares das `q.i.p.`

Por exemplo, para a função x^2, com base nos limites seguintes

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\Rightarrow\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}}_{h\neq 0}\Rightarrow\underbrace{\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x}_{h\neq 0\text{ e }h\to 0},$$

conclui-se que a derivada de x^2 é $2x$. Convém, no entanto, explicar que $h \neq 0$ e que $2x + h \neq 2x$, mas $2x + h$ tende a $2x$ quando h se torna infinitamente pequeno.

A partir de cenários como esse, as discussões sobre problemas mais sofisticados podem ser iniciadas. Um exemplo clássico é o de uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

Exemplo 6. A função exposta por K. Weierstrass,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\cos(a^n\pi x)$$

onde b é um inteiro ímpar e a é tal que $0 < a < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ é uma função no sentido preciso da definição, mas não é possível desenhá-la com lápis e papel (sua construção não é intuitiva) [21, 43]. Além disso, é uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

3.6. Integrais

Sob a ótica histórica, o conceito de integral é investigado desde a Grécia antiga, quando cientistas como Arquimedes, Kepler, Cavalieri, Viviani, Fermat, Gregory St.Vincent, Guldin, Gregory, Barrow ocupavam-se com a computação de áreas, superfícies e volumes. A meta era determinar um número que representasse, por exemplo, a área de uma determinada região [26]. Se a região é regular, os métodos clássicos poderiam ser utilizados, tal como os estudantes os utilizam no colégio, com as fórmulas da área de um triângulo, quadrado, círculo, trapézio etc. No entanto, para figuras não regulares, os métodos tradicionais falhavam, sendo necessária a busca por novos processos. É clássico dizer do *método da exaustão* que é o método que consistia na inserção do maior número possível de figuras regulares, na parte interna da região cuja área se pretende calcular, de modo que sua soma levaria a uma aproximação da área da região pretendida. Essas inserções produziam resultados aceitáveis para os padrões da época. Em alguns casos fórmulas "mágicas" eram descobertas, como a de Arquimedes, que identificou como computar a área de um segmento parabólico ([12], p.100), ou seja, a área de uma parábola é $\frac{4}{3}$ da área de um triângulo com mesma base e altura.

Com a invenção do Cálculo, descobre-se também que integral é o processo inverso de derivada. Isso simplifica a busca por áreas, volumes e superfícies. A fórmula[17]

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

indica a área da região situada entre a curva $y = f(x)$ e $y = 0$, limitada entre $x = a$ e $x = b$, desde que $f(x) > 0$, por exemplo. Mas, para obter o resultado da integral acima, na época de Newton

[17] A notação $\int_a^b f(x)dx$ foi introduzida por J. B. J. Fourier no século XIX.

e Leibniz, fazia-se necessário encontrar uma função F, denominada de primitiva[18] de f, para que o cálculo $F(b) - F(a)$ pudesse ser realizado. Assim, a matemática "heurística" do século XVIII reduz-se, no caso de integrais, à busca por primitivas de funções. Mais ainda, o Cálculo resume-se à palavra *Calculus*, de origem algorítmica. Newton e Leibniz inventam um processo sistemático para calcular inclinação de curvas, taxas de variação, áreas de regiões etc. No entanto, como a história mostrou, eles não sabiam por que esses algoritmos funcionavam [9]. Essa compreensão veio somente no final do século XIX, com a revisão dos fundamentos da matemática [32].

Como nem todas as funções $f(x)$ têm primitivas, nem todas as integrais podem ser calculadas. Sabe-se que uma grande parte das funções elementares, tais como funções polinomiais, funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas etc. são integráveis no sentido de Newton e Leibniz e possuem primitivas, mas funções como e^{-x^2}, $|x|$, não possuem primitivas. Isso significou que novos métodos precisariam ser investigados para que se almejasse aumentar a classe das funções integráveis.

Esclarecer tais incertezas é importante, pois é clássico que resolver uma integral não é simplesmente procurar por uma primitiva. A. Cauchy introduziu o conceito de integrais a partir de limites de somas[19], sem estabelecer, em sua definição, referência às primitivas. Com isso Cauchy expõe sua classe de funções integráveis, mas lança mão das `q.i.p.` em seus limites. Ou seja, é com essas quantidades, diga-se "infinitésimos", que Cauchy impõe uma *revolução científica* na matemática ao abordar o conceito de integrais sem relacioná-lo às derivadas e com a utilização de limites. Assim, integrais e derivadas podem ser definidas de modo independente umas das outras, mas acabam por se inter-relacionar via Teorema Fundamental do Cálculo [27, 13, 14] . Cauchy utiliza apenas de funções contínuas em sua definição, mas foi B. Riemann quem aprimorou os trabalhos de Cauchy e forneceu uma primeira abordagem rigorosa sobre a teoria de integração [27].

Convém exibir as definições de função integrável no sentido de Cauchy e no sentido de Riemann para indicar, seguindo o propósito deste artigo, a relevância de uma aritmética de números reais. Utiliza-se da cor vermelha para marcar a diferença entre ambas as definições, e para marcar também a presença das `q.i.p.` nessas definições. Convém alertar que as definições na sequência são atuais, modernas, mas carregam a ideia conceitual da época de Cauchy e de Riemann.

Definição 1. ([5], pp199-200) Se $I = [a, b]$ é um intervalo fechado limitado em $\mathbb{R}$, então uma **partição** de I é um conjunto finito, ordenado, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de pontos em I, tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Os pontos de $\mathcal{P}$ são usados para dividir $I = [a, b]$ em subintervalos disjuntos

$$I_1 = [x_0, x_1] \quad I_2 = [x_1, x_2], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Representa-se uma partição de $[a, b]$ por

$$\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}.$$

[18] Uma função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é dita ser uma primitiva (ou antiderivada) de f em $[a, b]$.

[19] Com seu conceito de limites, Cauchy vai além da proposta grega de métodos de exaustão. De certo modo os gregos introduziam figuras regulares à "exaustão", ou seja, em um número finito, mas que sejam exauridas. Cauchy indica como introduzir figuras regulares à exaustão infinita, no limite. Isso pode indicar uma significativa diferença de pensamento entre os processos gregos e o processo *ad infinitum* de Cauchy.

Se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição de I, então uma **etiqueta** é um ponto $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Uma **partição etiquetada** é um conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n.$$

Definição 2. Se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição de $[a, b]$, então a **soma de Cauchy** de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ correspondente a $\mathcal{P}$ é o número

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 3. Uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita ser **Cauchy integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a, b]$ com $||\mathcal{P}|| < \delta_\varepsilon$, então

$$|S(f; \mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

Definição 4. ([5], p200) Se $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição etiquetada, então a **soma de Riemann** de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ é o número

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 5. ([5], p201) Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita ser **Riemann integrável** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição etiquetada de $[a, b]$ com $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

Grosso modo, as alterações entre as definições de Cauchy e de Riemann, além de em Riemann não haver a exigência de função contínua, residem na mudança entre escolher o ponto da esquerda, x_{i-1}, de cada intervalo I na partição $\mathcal{P}$ de Cauchy, para a escolha de um ponto t_i qualquer em cada Intervalo I de uma partição etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ de Riemann. É uma diferença sutil, uma diferença própria do universo das `q.i.p.` Uma alteração que age também na classe de funções integráveis. Com a definição de Cauchy é possível integrar funções descontínuas em um número finito de pontos, já com a definição de Riemann, torna-se possível integrar funções com um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade.

A classe de funções integráveis, na época de Riemann e até final do século `XIX`, era inadequada para resolver os problemas deixados por Fourier. H. Lebesgue vai além, introduz um conceito diferente para expandir a classe de funções integráveis, o conceito de medida [3]. No entanto, na época de sua publicação, os trabalhos de Lebesgue foram vistos, inicialmente, com algumas ressalvas pela comunidade acadêmica. O problema é que, nele, as funções descontínuas e aquelas que não têm derivadas, objetos principais nos trabalhos de Lebesgue, eram consideradas como "monstruosidades," e pairavam dúvidas se essas funções poderiam ser consideradas como objetos matemáticos ([19], p.115). Seria abuso de linguagem dizer que Lebesgue buscou o ápice das `q.i.p.`, e mesmo assim, inicialmente, foi questionado. Mas a história mostrou que grande parte das funções em matemática são funções "esquisitas", tais como as funções de Cauchy no exemplo 3, ou a função de Dirichlet no exemplo 2, ou ainda aquelas funções que são contínuas e não são diferenciáveis em nenhum ponto, tal como no exemplo 6. A partir daí, com uma teoria de medida e integração, ele expande a classe das funções integráveis, no final do século XIX e início do XX [27], e resolve os problemas deixados por Fourier, ao analisar problemas de convergência em integrais. Mas, ainda assim, algumas funções falhavam no quesito integrabilidade, o que fez com que J. Kurzweil e R. Henstock [28, 33, 22, 4] desenvolvessem uma nova teoria de integração[20], a qual integra uma classe maior de funções, inclusive algumas funções não integráveis, no sentido de Lebesgue. Interessante é que ainda não há uma teoria completa de integração e há ainda problemas abertos a serem resolvidos[21].

4. Conclusões

O presente artigo destina-se ao ensino de Cálculo tal como exposto em muitos textos sobre ensino, como em [15]. A pedagogia aqui exposta vincula-se não somente à exposição dos aspectos históricos presentes na gênese do descobrimento de um determinado conceito matemático, mas também à contextualização da matemática exposta, evitando as situações em que os fragmentos predominem, conduzindo o leitor a interrogações e incertezas. Pode-se dizer, em breves palavras, segundo as ideias neste artigo, que ensinar Cálculo é ensinar a operacionalizar com uma aritmética de quantidades infinitamente pequenas e entender o funcionamento dos algoritmos presentes no *Calculus*. Neste texto utilizaram-se alguns exemplos que se entende possam ser esclarecedores para a compreensão dessa *nova* aritmética, mas há, com certeza, uma gama de outros exemplos que podem igualmente ser utilizados com o mesmo propósito. Espera-se que, com os dizeres deste artigo, possa haver uma compreensão das nuances dos cursos de Cálculo, e, com isso, ocorram melhorias na captação de conceitos matemáticos e a consequente obtenção de resultados educacionais favoráveis ao aprendizado.

É possível perceber também o quanto a matemática e o pensamento científico alteraram-se com a introdução das `q.i.p.` na matemática. Em síntese, a aritmética do colégio é necessária para o acompanhamento de cursos de Cálculo, mas ela não é suficiente, pois urge que uma aritmética de `q.i.p.` se faça presente.

Referências

[1] Alexander, Amir. *Infinitesimal - A teoria matemática que mudou o mundo*. Jorge Zahar Editor Ltda, Rio de Janeiro, 2014.

[2] Bair, J., Błaszczyk, P., Ely, R., Henry, V., Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M.G., Kutateladze, S.S., McGaffey, T., Schaps, D.M., Sherry, D., Shnider, S. *"Is mathematical history written by the victors?"rq* Notices of the AMS, 60(7), 886-904.

[3] Bartle, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[4] Bartle, R. G. *"A Modern Theory of Integration"*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 32. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[5] Bartle, R. G.; Sherbert, D. R. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition, Wiley India Edition, New Delhi, 2011.

[20] O livro de Jean Mawhin [37] trata de integrais de Henstock-Kurzweil, ou Gauge integrais, como também são conhecidas.

[21] https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/gauge/ (acessado no dia 28 de setembro de 2019 às 18:26).

[6] Belna, Jean-Pierre. *Cantor*. Figuras do Saber. Tradução Guilherme João de Freitas Teixeira, Revisão Tecnica Michel Paty. Editora Estação Liberdade, São Paulo, 2011.

[7] Berkeley, G. *The analyst: or a discourse addressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, then religious mysteries and points of faith*. London: printed for J. Tonson, 1734.

[8] Bicudo, Irineu. *Os Elementos - Euclides*. Tradução de Irineu Bicudo. Editora Unesp, Rio Claro, 2009.

[9] Boas Jr., R. P. *"Calculus as an experimental science." The American Mathematical Monthly,* v. 78, n. 6, pp.664-667, 1971.

[10] Boolos, G. S.; Jeffrey, R. C. *Computability and Logic*. Third Edition, Reprinted, Cambridge University Press, 1999.

[11] Bottazzini, Umberto. *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag, Inc., 1986.

[12] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide (IME/USP), 9a Reimpressão. Ed. Edgard Blücher Ltda, 1991. (original: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. 1968)

[13] Bressoud, David M. *A radical approach to real analysis.* Vol. 2. Mathematical Association of America, 2007.

[14] Bressoud, David M. *A radical approach to Lebesgue's theory of integration.* Cambridge University Press, 2008.

[15] Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. *"Teaching and Learning of Calculus"*. In: *Teaching and Learning of Calculus.* Springer International Publishing, 2016. pp.1-37.

[16] Cauchy, Augustin Louis. *Cours d'analyse (Cours d'analyse de l'école royale polytechnique.* 1^{re} *partie: analyse algébrique.* Paris, 1821.

[17] Cauchy, Augustin Louis. *Calcul infinitésimal (Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal).* Vol. 1. Imprimérie Royale, Paris, 1823.

[18] Cutland, N. *Computability*. Cambridge, London. 1980.

[19] Van Dalen, D.; Monna, A.F. *Sets and integration - An outline of the development.* Wolters-Noordhoff Publishing. Groningen, The Nederlands. 1972.

[20] Dedekind, Richard. *Essays on the theory of numbers-Continuity and Irrational Numbers-The Nature and Meaning of Numbers*, The Open Court Publishing Company, 1901 (first publication). Dover Publications, 1963, 2010.

[21] Gelbaum, B.R., Olmsted, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, New York, 1964.

[22] Gordon, Russell A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. No. 4. American Mathematical Society, 1994.

[23] Grabiner, Judith V. *The Origin of Cauchy's Rigorous Calculus.* Dover Publications, Inc., New York, 1981.

[24] Grabiner, Judith V. *"Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus"*, *The American Mathematical Monthly,* vol. 91, pp.185-194, 1983.

[25] Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la Chaleur*, Firmin-Didot père et fils, Paris, 1822. Facsimile, Ed. Jacques Gabay, Paris, 1988. Em inglês, *The Analytical Theory of Heat.* Dover Publications. Tradução de Alexander Freeman em 1878. Originalmente publicado em 1822, 2003.

[26] Hairer, E.; Wanner, G. *Analysis by Its History.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[27] Hawkins, T. *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development.* 2nd edition, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

[28] Henstock, Ralph. *Theory of integration.* Butterworths,1963.

[29] Jahnke, H. N., *A History of Analysis*, History of Mathematics, Volume 24, American Mathematical Society, 2003.

[30] Klein, Felix. *Ueber Arithmetisirung der Mathematik. Göttinger Nachrichten* (Geschäftliche Mittheilungen), 1895, p.82. (The arithmetizing of mathematics. Miss Maddison's translation in the Bulletin, 2d series, vol. 2, p.241, 1896), 1895

[31] Klein, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry.* Dover Publications, New York, 2004.

[32] Kline, Morris. *Les fondements des mathématiques.* La recherche, v. 54, pp.200-208, 1975.

[33] Kurzweil, Jaroslav. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter.* Czechoslovak Mathematical Journal 7.3: 418-449, 1957.

[34] Lebesgue, Henri Léon. *Intégrale, Longueur, Aire.* 134f. Le Grade de Docteur és Sciences Mathématiques (30 de junho de 1902), Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902.

[35] Lebesgue, H. L. *Measure and the Integral.* San Francisco, Holden-Day, 1966.

[36] Lützen, Jesper, *The foundation of analysis in the 19th century.* Hans Niels Jahnke, (ed.), A History of Analysis, chap. 6, Amer. Math. Soc., 2003, pp.155-195.

[37] Mawhin, Jean. *Analyse: fondements, techniques, évolution.* De Boeck Université, Brussels, 1992. Second edition, 1997.

[38] Phillips, Esther R. *A Introduction to Analysis and Integration Theory.* Dover Publications, New York, 1984.

[39] Pierpont, James. *On the arithmetization of mathematics.* Bulletin of the American Mathematical Society, v. 5, n. 8, pp.394-406, 1899.

[40] Russ, S. B. *A translation of Bolzano's paper on the Intermediate Value Theorem.* Historia Mathematica, v.7, n.2, pp.156-185, 1980.

[41] Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany.* Springer-Verlag, 2005.

[42] Toeplitz, Otto. *The Calculus — A Genetic Approach.* Chicago University Press, Chicago, 2007.

[43] Van Vleck, E. B. *The Influence of Fourier series on the development of mathematics.* Science 39, 113-124, 1914.

[44] Weil, A. 1978. *"History of Mathematics: Why and How?" Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki. Vol. 1, 227-236.

[45] Wilcox, H. J., Myers, D. L. *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series.* Dover Publications, New York, 1978.

José Carlos Magossi
Faculdade de Tecnologia - FT
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
<magossi@ft.unicamp.br>

Recebido: 04/11/2019
Publicado: 03/02/2020