PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.7, n.1, 2019
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo73

Progressões geométrico-aritméticas e aritmético-geométricas generalizadas

Rogério Rocha

Resumo

Este artigo apresenta duas novas classes de progressões, a saber, as progressões Geométrico-(Aritméticas de ordem k) e (Aritmético de ordem k)-Geométricas. Em determinados casos, exibimos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos, cujas manipulações algébricas envolvidas nas demonstrações são acessíveis ao público do ensino médio.

Palavras-chave: PGA e PAG Generalizadas. Progressão Aritmética de Ordem Superior. Soma dos n Primeiros Termos.

Abstract

This article presents two new classes of progressions, namely the Geometrical- (Arithmetic of order k) and (Arithmetic of order k)-Geometric progressions. In certain cases, we display a formula for the sum of n first terms, whose algebraic manipulations involved in the demonstrations are accessible to the high school public.

Keywords: Generalized GAP and AGP. Arithmetic progression of higher order. Sum of n first Terms.

1. Introdução

Combinações das clássicas Progressões Geométricas (PGs) e Progressões Aritméticas (PAs) dão origem às progressões Geométrico-Aritméticas (PGA) e às Progressões Aritmético-Geométricas (PAG); mais especificamente, o termo geral de uma PGA é a soma do termo geral de uma PG com o termo geral de uma PA: e o termo geral de uma PAG é o produto do termo geral de uma PA com o termo geral de uma PG. Em [4] e na Seção "Preliminares", podem-se conferir as definições formais e as fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos dessas progressões.

As PAs foram generalizadas pelas Progressões Aritméticas de ordem superior, denotadas por PAs de ordem k, $k \in \mathbb{N}$. Quando $k = 1$, as PAs de ordem k coincidem com as PAs clássicas (conferir Seção "Preliminares" e [3]). Nesse sentido, naturalmente, surgem os seguintes questionamentos:

- é possível generalizar as definições de PGA e PAG, substituindo as PAs por PAs de ordem k?
- caso a resposta à pergunta anterior seja afirmativa, é possível deduzir fórmulas que representem as somas dos n primeiros termos de ambas as progressões generalizadas?

Neste artigo, respondemos a ambos os questionamentos de forma satisfatória:

(i) generalizamos as definições de PGA e PAG, mais precisamente, apresentamos as definições das Progressões Geométrico-(Aritméticas de ordem k) e (Aritmético de ordem k)-Geométricas, que denotamos por PGA^k e PA^{k}G, respectivamente;

(ii) em relação a fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos da PGA^k e da PA^{k}G: deduzimos a fórmula de uma PGA^k, para todo $k \in \mathbb{N}$, e deduzimos a fórmula de uma PA^{k}G, para $k = 2$ e $k = 3$.

Até onde sabemos, este é o primeiro trabalho que aborda as progressões PA^{k}G e PGA^k.

2. Preliminares

Nesta seção, apresentamos os conceitos e resultados que serão fundamentais para as definições das sequências PGA^k e PA^{k}G. Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [3] e [4].

Como primeiro passo, definiremos as progressões que generalizaremos.

Definição 1. a) Uma **Progressão Geométrico-Aritmética (PGA)** é toda progressão onde o seu termo geral é da forma $b_n = aq^{n-1} + (n-1)r$, sendo a, r e q constantes não nulas e $q \neq 1$.
b) Uma **Progressão Aritmético-Geométrica (PAG)** é toda progressão onde o seu termo geral é da forma $a_n = [a + (n-1)r]q^{n-1}$, sendo a, r e q constantes não nulas e $q \neq 1$.

Observação 1. **a)** A PGA e a PAG são combinações de PAs e PGs: O termo geral de uma PGA é a soma do termo geral de uma PG com o termo geral de uma PA cujo primeiro termo é nulo; e o termo geral de uma PAG é o produto do termo geral de uma PA com o termo geral de uma PG cujo primeiro termo é 1. **b)** Apesar de ser considerado $q \neq 1$ e $r \neq 0$, temos: Se $q = 1$, então a PGA (ou a PAG) seria uma PA; se $r = 0$, então a PGA (ou a PAG) seria uma PG.

Exemplo 1. a) A sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4, 11, 22, 41, 76, \cdots)$, onde $b_n = 4 \times 2^{n-1} + (n-1)3$, é uma PGA para $a = 4,\ r = 3$ *e* $q = 2$;
b) A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \ldots\right)$, onde $a_n = (1 + (n-1)2)(\frac{1}{2})^{n-1}$, é uma PAG para $a = 1$, $r = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

A seguinte proposição fornece-nos as fórmulas que representam a soma dos n primeiros termos das PGA e PAG. Suas demonstrações podem ser encontradas em Paiva (2010).

Proposição 1. *Considere a PGA e a PAG dadas pela Definição 1. Temos:*
a) *a soma S_n dos n primeiros termos de uma PGA é dada por*

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2};$$

b) *a soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG é dada por*

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}.$$

Exemplo 2. **a)** A soma dos n primeiros termos da PGA do Exemplo 1 é dada por

$$S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} + \frac{(n-1)3n}{2} = \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 2^{n+2} - 4.$$

Observe que $S_1 = 4,\ S_2 = 15 = 4 + 11,\ S_3 = 37 = 4 + 11 + 22$ etc.
b) A soma dos n primeiros termos da PAG do Exemplo 1 é dada por

$$S_n = \frac{1(1-(1/2)^n)}{1-1/2} + \frac{2(1/2)[1-n(1/2)^{n-1} + (n-1)(1/2)^n]}{(1-1/2)^2} = 6 - 2^{1-n}(2n+3).$$

Observe que $S_1 = 1,\ S_2 = \frac{5}{2} = 1 + \frac{3}{2},\ S_3 = \frac{15}{4} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}$ etc.

As definições das novas progressões envolvem as PAs de ordem $k,\ k \in \mathbb{N}$. Em seguida, apresentamos as definições de tais PAs. Para tanto, precisamos do conceito de operador diferença.

Definição 2. **a)** Para uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, define-se o chamado **Operador Diferença** $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que constitui uma nova sequência, definida por $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma nova sequência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e assim por diante, $(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\Delta^4 a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ etc.
b) Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma **PA de ordem** k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante.

Observação 2. **a)** Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma PA clássica de razão r, então, $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ \Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = r$. Desse modo, as PAs clássicas são PAs de ordem 1;
b) Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2 se $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 1 não estacionária (razão não nula); é uma PA de ordem 3 se $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 1 não estacionária, e assim por diante.

Exemplo 3. **a)** A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2, 4, 14, 28, 46, \ldots)$, onde $a_1 = -2$ e $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 2, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 4n + 2$, $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 4$, e assim, $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 10, 14, 18, 22, \ldots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$;
b) A sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-3, -2, 6, 33, 97, \ldots)$, onde $b_1 = -3$ e $b_{n+1} = b_n + n^3$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 4, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n = n^3$, $\Delta^2 b_n = \Delta^1 b_{n+1} - \Delta^1 b_n = 3n^2 + 3n + 1$, $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 6n + 6$, $\Delta^4 b_n = \Delta^3 b_{n+1} - \Delta^3 b_n = 6$, e assim, $(\Delta^1 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 8, 27, 64, 125, \ldots)$, $(\Delta^2 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (7, 19, 37, 61, 91, \ldots)$, $(\Delta^3 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, 36, \ldots)$ e $(\Delta^4 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 6, 6, 6, \ldots)$.

A seguinte proposição proporciona-nos importantes relações entre as PAs de ordem superior e suas respectivas sequências das somas parciais com as funções polinomiais. Para demostração, conferir, por exemplo, [2].

Proposição 2. **a)** *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma PA de ordem* k*, então seu termo geral* a_n *é um polinômio de grau* k *na variável* n*. Reciprocamente, Se* $P(n)$ *é um polinômio de grau* k*, então a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots)$ *é uma PA de ordem* k*.*
b) *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma PA de ordem* k*, então a sequência das somas parciais de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, denotada por* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$*, é uma PA de ordem* $k+1$*.*

Os próximos dois exemplos ilustram a Proposição 2.

Exemplo 4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 6, 15, 28, 45, ...)$, onde $a_n = 1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3)$ e considere $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, a sequência das somas parciais de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
a) Verifique que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2 e obtenha o polinômio de grau 2 que representa a_n;
b) Verifique que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3 e obtenha o polinômio de grau 3 que representa S_n;
c) Calcule a soma dos 100 primeiros termos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solução:
a) Observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = 4n + 1$ e $\Delta^2 a_n = 4$. Assim, $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, 9, 13, 17, 21, ...)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, 4, ...)$. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2. Então, pela Proposição 2, item a), devemos ter $a_n = P(n) = an^2 + bn + c$ $(a \neq 0)$. Assim, $P(1) = 1, P(2) = 6$ e $P(3) = 15$ ou, ainda,

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 15. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $a = 2, b = -1$ e $c = 0$. Assim, $a_n = 2n^2 - n$.
b) Temos: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$, $\Delta^2 S_n = \Delta^1 S_{n+1} - \Delta^1 S_n = 4n + 5$ e $\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 4$, isto é, $(\Delta^1 S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 15, 28, 45, 66, \cdots)$, $(\Delta^2 S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (9, 13, 17, 21, 25, \cdots)$, $(\Delta^3 S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4, 4, 4, 4, \cdots)$. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3. Então, pela Proposição 2, item a), devemos ter $S_n = P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ $(a \neq 0)$. Então, como $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 7, 22, 50, 95, ...)$, devemos ter $P(1) = 1, P(2) = 7$, $P(3) = 22$ e $P(4) = 50$ ou ainda,

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 22 \\ 64a + 16b + 4c + d = 50. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}$ e $c = -\frac{1}{6}$ e $d = 0$. Assim, $S_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$.
c) Desejamos obter o valor de S_{100}. Pelo item b), $S_{100} = \frac{2}{3}100^3 + \frac{1}{2}100^2 - \frac{1}{6}100 = 671650$.

Exemplo 5. Dado o polinômio $P(n) = n^3 - n$, verifique que a sequência

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P(1), ..., P(n), ...)$$

é uma PA de ordem 3.

Solução:
b) Desde que $a_n = P(n) = n^3 - n$, temos: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = P(n + 1) - P(n) = 3n^2 + 3n$, $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 6n + 6$ e $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6$. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 6, 24, 60, ...)$, $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 18, 36, 60, 90, ...)$, $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, 36, \cdots)$ e $(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 6, 6, \cdots)$. Portanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3.

3. PGA e PAG generalizadas

Nesta seção, apresentamos as definições das novas sequências (PGA^k e PA^{k}G), deduzimos a fórmula que representa a soma dos n primeiros termos das PGA^{k}s, para um k qualquer, e das PA^{k}Gs, para $k = 2$ e $k = 3$. A seguinte observação será útil para as definições da PGA^k e da PA^{k}G.

Observação 3. Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem k. Desde que a classe das PAs de ordem k é identificada com a classe das progressões em que seus termos gerais são polinômios de grau k na variável n (Proposição 2, item a)), podemos considerar $b_n = d_k n^k + d_{k-1}n^{k-1} + ... + d_1 n + d_0$, onde $d_i,\ i = 0, 1, 2, ..., k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

Definição 3. a) [PGA^k] Considere $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PG onde, $c_n = dq^{n-1}$, sendo $d \neq 0$ e $q \neq 1$. A progressão **Geométrico-(Aritmética de ordem** k**)**, denotada por PGA^k, e associada à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e à $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é a progressão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n + c_n = b_n + dq^{n-1}$. Pela Observação 3, podemos considerar $a_n = b_n + c_n = (d_k n^k + d_{k-1}n^{k-1} + ... + d_1 n + d_0) + dq^{n-1}$, onde $d_i,\ i = 0, 1, 2, ..., k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

b) [PA^{k}G] Considere $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PG, onde $c_n = q^{n-1}$, sendo $q \neq 1$. A progressão **(Aritmético de ordem** k**)-Geométrica**, denotada por PA^kG, e associada à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e à $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é a progressão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n c_n = b_n q^{n-1}$. Pela Observação 3, podemos considerar $a_n = b_n c_n = (d_k n^k + d_{k-1}n^{k-1} + ... + d_1 n + d_0)q^{n-1}$, onde $d_i,\ i = 0, 1, 2, ..., k$, são constantes com $d_k \neq 0$.

Observação 4. Quando $k = 1$, a PGA^k e a PA^{k}G coincidem, naturalmente, com a PGA e a PAG, respectivamente.

Exemplo 6. a) A progressão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 7, 14, 25, 42, ...)$, onde $a_n = (n^2 + 1) + 2^{n-1}$, é uma PGA^2;
b) A progressão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 8, 36, 128, 400, ...)$, onde $a_n = n^2 2^{n-1}$, é uma PA^{2}G;
c) A progressão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 102, 882, 5562, 29970, ...)$, onde $a_n = (2n^3 + 4n^2 + 6n - 10)3^{n-1}$, é uma PA^{3}G.

As proposições a seguir fornecem os principais resultados deste trabalho. Inicialmente, enunciamos e provamos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PGA^k, para um k qualquer e, posteriormente, em duas outras proposições, de uma PA^{k}G, para $k = 2$ e $k = 3$. Após cada proposição, aplicamos essas fórmulas em alguns exemplos.

Proposição 3. *Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem k, $k \in \mathbb{N}$, e considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n + dq^{n-1}$, uma PGA^k, sendo $d \neq 0$ e $q \neq 1$. Então a soma $\hat{S}_n^k$ dos n primeiros termos dessa PGA^k é dada por*

$$\hat{S}_n^k = \frac{d(1-q^n)}{1-q} + P(n), \tag{1}$$

onde $P(n)$ é o polinômio de grau $k+1$, que representa a soma dos n primeiros termos da progressão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, da PA de ordem k, conforme Proposição 2, item b).

Demonstração. Observe que

$$\hat{S}_n^k = b_1 + d + b_2 + dq + b_3 + dq^2 + ... + b_n + dq^{n-1}.$$

Logo,

$$q\hat{S}_n^k = qb_1 + dq + qb_2 + dq^2 + qb_3 + dq^3 + ... + qb_n + dq^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\hat{S}_n^k(1-q) &= d - dq^n + b_1(1-q) + b_2(1-q) + ... + b_n(1-q)\\ &= d(1-q^n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)(1-q).\end{aligned}$$

Então, dado que $q \neq 1$,

$$\hat{S}_n^k = \frac{d(1-q^n)}{1-q} + (b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

Consideremos $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Como, por hipótese, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k, pela Proposição 2, item b), $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem $k+1$. Logo, pela Proposição 2, item a), S_n é um polinômio, em n, de grau $k+1$. Isto é, existe um polinômio $P(n)$ de grau $k+1$ tal que $S_n = P(n)$. Portanto, $\hat{S}_n^k = \frac{d(1-q^n)}{1-q} + P(n)$. □

Exemplo 7. Considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 7, 14, 25, 42 \ldots)$, onde $a_n = n^2+1+2^{n-1}$, a PGA^2 do Exemplo 6. **a)** Calcule a soma dos n primeiros termos dessa PGA^2, isto é, $\hat{S}_n^2$; **b)** Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3.

Solução: a) Considere $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 5, 10, 17, 26, ...)$, tal que $b_n = n^2 + 1$ e considere a sequência das somas parciais de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 7, 17, 34, 60, ...)$. Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2, pela Proposição 2, item b), $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3, e, portanto, pela Proposição 2, item a), S_n é um polinômio de grau 3 em n. Assim, $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Então devemos ter

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & + & d & = & 2 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 7 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 17 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 34. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{7}{6}$ e $d = 0$. Logo, $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$. Portanto, pela Proposição 3, a soma dos n primeiros termos da PGA^2 é dada por

$$\hat{S}_n = \frac{(1-2^n)}{1-2} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = 2^n - 1 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n.$$

b) Temos: $\hat{S}_1^2 = 2 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = 3$, $\hat{S}_2^2 = 2^2 - 1 + \frac{1}{3} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{7}{6} \times 2 = 10 = 3 + 7$ e $\hat{S}_3^2 = 2^3 - 1 + \frac{1}{3} \times 3^3 + \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{7}{6} \times 3 = 24 = 3 + 7 + 14$. □ O seguinte lema apresenta resultados básicos (o primeiro dos quais é conhecido na literatura matemática do Ensino Médio) que serão fundamentais para as provas das fórmulas que representam as somas dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, para $k = 2$ e $k = 3$.

Lema 1. *Considere $q \in \mathbb{R}$ tal que $q \neq 1$. Então*

a) $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$;

b) $1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + ... + (2n-1)q^{n-1} = \frac{1}{1-q}\left(1 - (2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{1-q}\right)$;

c) $1+7q+19q^2+37q^3+...+(3n^2-3n+1)q^{n-1} = \frac{1}{1-q}(1-(3n^2-3n+1)q^n + \frac{6}{1-q}((1-n)q^n + \frac{q-q^n}{1-q})$.

A seguinte proposição fornece-nos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, quando $k = 2$.

Proposição 4. *Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem 2, onde $b_n = P(n) = an^2 + bn + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n q^{n-1}$, uma PA^{2}G, sendo $q \neq 1$. Então a soma $\tilde{S}_n^2$ dos n primeiros termos dessa PA^{2}G, é dada por*

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{1-q}\left[c - P(n)q^n + \frac{a}{1-q}\left(1 - (2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{(1-q)}\right) + \frac{b(1-q^n)}{1-q}\right]. \quad (2)$$

Demonstração. Observe que

$$\tilde{S}_n^2 = (a+b+c) + (4a+2b+c)q + (9a+3b+c)q^2 + (16a+4b+c)q^3 + ... + (an^2+bn+c)q^{n-1}.$$

Logo,

$$q\tilde{S}_n^2 = (a+b+c)q + (4a+2b+c)q^2 + (9a+3b+c)q^3 + (16a+4b+c)q^4 + ... + (an^2+bn+c)q^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^2(1-q) =& (a+b+c) - (an^2+bn+c)q^n + (3a+b)q + (5a+b)q^2 + (7a+b)q^3 \\ &+ ... + ((2n-1)a+b)q^{n-1}.\end{aligned}$$

Ou, ainda,

$$\tilde{S}_n^2(1-q) = c - (an^2+bn+c)q^n + a(1+3q+5q^2+...+(2n-1)q^{n-1}) + b(1+q+q^2+...+q^{n-1}).$$

Uma vez que $P(n) = an^2+bn+c$, portanto, pelo Lema 1,

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{1-q}\left[c - P(n)q^n + \frac{a}{1-q}\left(1-(2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{(1-q)}\right) + \frac{b(1-q^n)}{1-q}\right].$$

□

Exemplo 8. Considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 8, 36, 128, 400, ...)$, onde $a_n = n^2 2^{n-1}$, a PA^{2}G do Exemplo 6.
a) Obtenha a soma dos n primeiros termos dessa PA^{2}G, isto é, $\tilde{S}_n^2$;
b) Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3.

Solução: a) Observe que $a_n = b_n q^{n-1}$, onde $b_n = P(n) = n^2$ e $q = 2$. Portanto, pela Proposição 4,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n &= \frac{1}{1-2}\left[0 - n^2 2^n + \frac{1}{1-2}\left(1-(2n-1)2^n + \frac{2(2-2^n)}{(1-2)}\right) + \frac{0(1-2^n)}{1-2}\right] \\ &= 2^n n^2 - 2^{n+1}n + 3\times 2^n - 3.\end{aligned}$$

b) Temos: $\tilde{S}_1^2 = 2 - 2^2 + 3\times 2 - 3 = 1$, $\tilde{S}_2^2 = 2^2\times 2^2 - 2^3\times 2 + 3\times 2^2 - 3 = 9 = 1+8$ e $\tilde{S}_3^2 = 2^3\times 3^2 - 2^4\times 3 + 3\times 2^3 - 3 = 45 = 1+8+36$. □

A última proposição fornece-nos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, quando $k = 3$.

Proposição 5. *Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem 3, onde $b_n = P(n) = an^3+bn^2+cn+d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n q^{n-1}$, uma PA^{3}G, sendo $q \neq 1$. Então a soma $\tilde{S}_n^3$ dos n primeiros termos dessa PA^{3}G, é dada por*

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3 =& \frac{1}{1-q}\left[d - P(n)q^n + \frac{a}{1-q}\left(1-(3n^2-3n+1)q^n + \frac{6}{1-q}\left((1-n)q^n + \frac{q-q^n}{1-q}\right)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{1-q}\left[\frac{b}{1-q}\left(1-(2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{1-q}\right) + \frac{c(1-q^n)}{1-q}\right].\end{aligned}$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3 &= (a+b+c+d) + (8a+4b+2c+d)q + (27a+9b+3c+d)q^2 \\ &+ (64a+16b+4c+d)q^3 + \ldots + (an^3+bn^2+cn+d)q^{n-1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}q\tilde{S}_n^3 &= (a+b+c+d)q + (8a+4b+2c+d)q^2 + (27a+9b+3c+d)q^3 \\ &+ (64a+16b+4c+d)q^4 + \ldots + (a(n-1)^3+b(n-1)^2+c(n-1)+d)q^{n-1} \\ &+ (an^3+bn^2+cn+d)q^n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3(1-q) &= (a+b+c+d) - (an^3+bn^2+cn+d)q^n + (7a+3b+c)q \\ &+ (19a+5b+c)q^2 + (37a+7b+c)q^3 + \ldots + (a(3n^2-3n+1)+b(2n-1)+c)q^{n-1}.\end{aligned}$$

Ou, ainda,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3(1-q) &= d - (an^3+bn^2+cn+d)q^n + a(1+7q+19q^2+37q^3+\cdots \\ &+ (3n^2-3n+1)q^{n-1}) + b(1+3q+5q^2+7q^3+\cdots+(2n-1)q^{n-1}) \\ &+ c(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}).\end{aligned}$$

Uma vez que $P(n) = an^3+bn^2+cn+d$, portanto, pelo Lema 1,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3 &= \frac{1}{1-q}\left[d - P(n)q^n + \frac{a}{1-q}\left(1-(3n^2-3n+1)q^n + \frac{6}{1-q}\left((1-n)q^n + \frac{q-q^n}{1-q}\right)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{1-q}\left[\frac{b}{1-q}\left(1-(2n-1)q^n + \frac{2(q-q^n)}{1-q}\right) + \frac{c(1-q^n)}{1-q}\right].\end{aligned}$$

□

Exemplo 9. Considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 102, 882, 5562, 29970, \ldots)$, onde $a_n = (2n^3+4n^2+6n-10)3^{n-1}$, a PA^{3}G do Exemplo 6.

a) Obtenha a soma dos n primeiros termos dessa PA^{3}G, isto é, $\tilde{S}_n^3$;

b) Aplique a fórmula obtida no item a), para $n = 1, 2$ e 3.

Solução: a) Observe que $a_n = b_n q^{n-1}$, onde $b_n = P(n) = 2n^3+4n^2+6n-10$ e $q = 3$. Portanto, pela Proposição 5,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n^3 &= \frac{1}{1-3}\left[-10 - P(n)q^n + \frac{2}{1-3}\left(1-(3n^2-3n+1)3^n + \frac{6}{1-3}\left((1-n)3^n + \frac{3-3^n}{1-3}\right)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{1-3}\left[\frac{4}{1-3}\left(1-(2n-1)3^n + \frac{2(3-3^n)}{1-3}\right) + \frac{6(1-3^n)}{1-3}\right] \\ &= 3^n(n^3 + \frac{n^2}{2} - 2n - \frac{29}{4}) + 2\times 3^{n+1}n + \frac{29}{4}.\end{aligned}$$

b) Temos: $\tilde{S}_1^3 = 3(1+\frac{1}{2}-2-\frac{29}{4}) + 2\times 3^2 + \frac{29}{4} = 2$;
$\tilde{S}_2^3 = 3^2(2^3+\frac{2^2}{2}-2\times 2-\frac{29}{4}) + 2\times 3^{2+1}\times 2 + \frac{29}{4} = 104 = 2+102$ e,
$\tilde{S}_3^3 = 3^3(3^3+\frac{3^2}{2}-2\times 3-\frac{29}{4}) + 2\times 3^{3+1}\times 3 + \frac{29}{4} = 986 = 2+102+882.$ □

Em seguida, propomos para o leitor o desafio de deduzir a fórmula que representa a soma dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, para $k = 4$ e $k = 5$. Um desafio ainda maior é perceber o padrão das fórmulas e, assim, deduzir o caso geral.

Desafio

a) Obtenha a fórmula que representa a soma $\tilde{S}_n^4$ dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, para $k = 4$;

b) Obtenha a fórmula que representa a soma $\tilde{S}_n^5$ dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, para $k = 5$.

c) Motivado pelos resultados obtidos nos itens anteriores, obtenha a fórmula que represente a soma $\tilde{S}_n^k$ dos n primeiros termos de uma PA^{k}G, para $k \in \mathbb{N}$ qualquer.

4. Considerações finais

Apresentamos as progressões Geométrico-(Aritméticas de ordem k) [PGA^k] e (Aritmético de ordem k)-Geométricas [PA^{k}G]. Essas progressões, em conjunto com as progressões Geométrico-Aritméticas (PGA), Aritmético-Geométricas (PAG) e as clássicas progressões Geométrica (PG) e Aritmética (PA), constituem importantes ferramentas para a resolução de determinados problemas relacionados com a matemática e, em particular, com problemas relacionados com olimpíadas de matemática. Como trabalhos futuros, pretendemos: **a)** Identificar/propor problemas em diversas áreas do conhecimento que são modelados por PGA^k e PA^{k}G e, **b)** Generalizar o conceito de outras progressões que são combinações de PAs e PGs, como a sequência Geométrico-Aritmética alternada [5].

Referências

[1] Carneiro, J.P., Moreira, C.G. *Sequências aritmético-geométricas*. EUREKA!, v. 14, 2007.

[2] Morgado, A. C. O., Carvalho, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] Nobre, J. F. F., Rocha, R.A. *Progressões Aritméticas de Ordem Superior*. Professor de Matemática Online, v. 5, pp35–48, 2018.

[4] Paiva, R.E.B. *Progressões Aritmético-Geométricas e Geométrico-Aritméticas*. Revista do Professor de Matemática, v. 73, pp47–49, 2010.

[5] Rabago, J. F. T. *Arithmetic-geometric alternate sequence*. Scientia Magna, v. 8 (2), pp80–82, 2012.

Rogério Rocha
Universidade Federal do Tocantins - Palmas - TO
<azevedo@uft.edu.br>

Recebido: 30/11/2018