PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.7, n.2, 2019
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo716

Revisitando as equações do terceiro grau

João Francisco da Silva Filho Odete Elana Sousa Pereira

Resumo

No presente trabalho, estabelecemos uma interessante relação entre as raízes (reais e complexas) de uma equação do terceiro grau, através de uma fórmula que nos permite determinar duas das raízes a partir de uma terceira raiz. Na sequência, apresentamos alguns exemplos e concluímos com aplicações da fórmula supracitada, que consistem essencialmente de critérios para caracterizar as raízes de equações do terceiro grau.

Palavras-chave: Equações do Terceiro Grau; Fórmula de Cardano-Tartáglia; Raízes.

Abstract

In this work, we have established an interesting relationship between the roots (real and complex) of a third degree equation through a formula that allows us to determine two of the roots from a third root. In the sequel, we present some examples and conclude with applications of this formula, which consists of criteria to characterize the roots of third degree equations.

Keywords: Third degree equation; Cardano-Tartaglia formula; Roots.

1. Introdução

As raízes da equação do terceiro grau (ou *equação cúbica*) podem ser obtidas através das fórmulas de Cardano-Tartaglia, publicadas por Girolamo Cardano (1501-1576) no livro *Ars Magna* em 1545. Por muito tempo, tais fórmulas ficaram conhecidas simplesmente como "fórmulas de Cardano", embora tenham sido descobertas por Scipione del Ferro (1465-1526) e redescobertas por Tartaglia (1500-1557). A contribuição de Cardano foi desenvolver um método que reduz a equação geral a um caso particular, no qual um dos coeficientes é nulo. Devemos ressaltar que as fórmulas de Cardano-Tartaglia resumem-se a uma única fórmula, por isso nas próximas seções, passaremos a tratá-las apenas por "Fórmula de Cardano-Tartaglia".

As fórmulas de Cardano-Tartaglia foram uma importante motivação para a introdução dos números complexos, no entanto convém destacar que essas fórmulas não são muito práticas. Basta observar que aplicando-as às equações do terceiro grau que possuem três raízes reais, recaímos na necessidade de utilizar funções trigonométricas inversas para chegar em aproximações decimais de cada raiz. Por outro lado, recorrendo aos métodos numéricos, enfrentamos a dificuldade de isolar as raízes e depois construir sequências que convirjam para diferentes limites, sem contar a dificuldade de trabalhar com sequências de números complexos.

Diante do exposto, desenvolvemos uma fórmula que relaciona diretamente as raízes de uma equação do terceiro grau, cuja expressão consiste em escrever duas raízes em termos de uma terceira. Essa fórmula permite-nos calcular todas as raízes a partir de apenas uma delas, contornando a dificuldade de isolá-las ao usar os métodos numéricos. Sabendo que as equações do terceiro grau sempre possuem raízes reais, então a fórmula obtida minimiza o inconveniente de trabalhar com sequências de números complexos não reais. Por fim, apresentamos algumas aplicações da referida fórmula, que nos fornecem critérios simples para caracterizar as raízes de equações do terceiro grau, determinando quantas são as raízes reais e as complexas não reais.

2. A Fórmula de Cardano-Tartaglia

Inicialmente, devemos lembrar que as raízes de um polinômio do terceiro grau na forma reduzida (*ou forma deprimida*), definido por

$$Q(x) = x^3 + px + q,$$

podem ser obtidas a partir da fórmula de Cardano-Tartaglia, dada pela expressão

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

onde a constante

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \tag{1}$$

é chamada de *discriminante*.

Observação 1. No decorrer do artigo, estaremos trabalhando apenas com polinômios de coeficientes reais. Ademais, usaremos a expressão *raízes complexas* para fazer menção às raízes complexas não reais.

A fórmula de Cardano-Tartaglia também pode ser aplicada a um polinômio na sua *forma geral*, ou seja, um polinômio do terceiro grau na forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

já que é possível escrevê-lo como múltiplo de um polinômio na forma reduzida, através de uma mudança de variável. Nessa perspectiva, observe que

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + p\left(x + \frac{b}{3a}\right) + q\right],$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Aplicando a translação dada pela mudança de variável

$$y = x + \frac{b}{3a},$$

segue-se que

$$P\left(y - \frac{b}{3a}\right) = a\left(y^3 + py + q\right);$$

por fim, basta usar a fórmula de Cardano-Tartaglia para calcular as raízes do polinômio

$$Q(y) = y^3 + py + q$$

e subtrair "$-b/3a$"de cada uma das raízes obtidas, encontrando assim as raízes de $P(x)$.

Observação 2. De acordo com o sinal do discriminante D, podemos identificar os tipos de raízes de $P(x)$ (cf. [3] ou [7]). Mais precisamente, temos que:

(a) Se $D < 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais.

(b) Se $D = 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real de multiplicidade dois ou três.

(c) Se $D > 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas conjugadas.

3. Relacionando as raízes

Nesta seção, apresentamos um teorema que relaciona diretamente as três raízes de um polinômio do terceiro grau, escrevendo duas raízes em termos de uma terceira raiz, que por conveniência, podemos supor real.

Teorema 1. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$, então as demais raízes de $P(x)$ são dadas por*

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

onde $\Omega := b^2 - 3ac$.

Demonstração. Fazendo um cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(r) \\ &= a(x^3 - r^3) + b(x^2 - r^2) + c(x - r) \\ &= (x - r)[a(x^2 + rx + r^2) + b(x + r) + c], \end{aligned}$$

ou ainda,

$$P(x) = (x - r)[ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)].$$

Por simplicidade, reescrevemos $P(x)$ na forma

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$

onde $Q(x)$ denota o polinômio

$$Q(x) = ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c),$$

cujas raízes são dadas por

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Delta_Q}}{2a}. \tag{2}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= (ar + b)^2 - 4a(ar^2 + br + c) \\ &= -a(3ar^2 + 2br + c) + b^2 - 3ac, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(r), \tag{3}$$

onde

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \tag{4}$$

denota a derivada de $P(x)$ (cf. Lima *et al.* [5], p. 188).

Por fim, substituímos a igualdade (3) em (2) e concluímos que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

determina as outras duas raízes do polinômio $P(x)$. □

Se uma das raízes do polinômio $P(x)$ for previamente conhecida, podemos aplicar diretamente o Teorema 1 para determinar as demais raízes. Neste momento, faremos alguns exemplos que ilustram essa afirmação.

Exemplo 1. Determinar as raízes do polinômio do terceiro grau $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

Solução: Desde que $r = 1$ é uma raiz real de $P(x)$, então

$$w_{1,2} = -\frac{(a + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(1)}}{2a}, \tag{5}$$

determina as demais raízes de $P(x)$. Observe que

$$a = b = c = 1 \quad \text{e} \quad d = -3,$$

enquanto $P'(1) = 6$.

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = -2,$$

donde concluímos por (5) que

$$w_1 = -1 + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -1 - \sqrt{2}i$$

são as raízes procuradas.

Caso não conheçamos nenhuma das raízes de $P(x)$, podemos aplicar um dos métodos numéricos para calcular aproximações decimais de uma raiz real. Na sequência, basta usar o Teorema 1 para deduzir as aproximações decimais das demais raízes.

Exemplo 2. Calcular aproximações decimais das raízes do polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$.

Solução: Usando o método de Newton-Raphson (cf. [4], [5] ou [6]), devemos construir uma sequência que convirja para uma raiz real do polinômio $P(x)$. Tal sequência é definida por

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

onde k é um número real (a saber) suficientemente próximo da raiz que buscamos.

Reescrevendo a expressão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{16x_n^3 - 1}{24x_n^2 - 6}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

daí escolhemos $k = 1$, obtendo as aproximações

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1; & x_2 = 0,83333\ldots; & x_3 = 0,77431\ldots; \\ x_4 = 0,76620\ldots; & x_5 = 0,76604\ldots \quad \text{e} & x_6 = 0,76604\ldots, \end{array}$$

ou seja, uma das raízes reais de $P(x)$ é aproximadamente $r \approx 0,76604$.

Substituindo a aproximação obtida e os coeficientes do polinômio $P(x)$ na fórmula do Teorema 1, concluímos que

$$w_1 \approx -0,93969 \qquad \text{e} \qquad w_2 \approx 0,17365$$

são as aproximações decimais das outras duas raízes de $P(x)$.

Observação 3. As aproximações decimais obtidas no Exemplo 2 podem ser calculadas a mão, porém recomenda-se o uso de uma calculadora para facilitar os cálculos.

O próximo exemplo ilustra um caso bem interessante, no qual o polinômio $P(x)$ possui raízes complexas e não conhecemos sua raiz real.

Exemplo 3. Calcular as raízes do polinômio do terceiro grau $P(x) = 9x^3 + 12x^2 + 7x - 4$.

Solução: Novamente usamos o método de Newton-Raphson para construír a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1, \quad \text{se } n = 0 \\ \dfrac{18x_n^3 + 12x_n^2 + 4}{27x_n^2 + 24x + 7}, \quad \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

que nos fornece as aproximações decimais

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1; & x_2 = 0,58621\ldots; & x_3 = 0,38717\ldots; \\ x_4 = 0,33646\ldots; & x_5 = 0,33334\ldots \quad \text{e} & x_6 = 0,33333\ldots, \end{array}$$

então uma das raízes de $P(x)$ é aproximadamente $r \approx 0,33333$.

Substituímos a aproximação encontrada e os coeficientes de $P(x)$ na fórmula obtida no Teorema 1, concluindo que

$$w_1 \approx -0,83333 + 0,79931i \qquad \text{e} \qquad w_2 \approx -0,83333 - 0,79931i$$

são as aproximações decimais das demais raízes de $P(x)$.

Observação 4. No Exemplo 3, foi obtida a aproximação $r \approx 0,33333$ para a raiz real de $P(x)$, que nos permite conjecturar que $1/3$ é raiz do referido polinômio. Essa conjectura confirma-se ao verificarmos que $P(1/3) = 0$, consequentemente segue-se do Teorema 1 que as demais raízes de $P(x)$ podem ser expressas na forma

$$w_1 = -\frac{5 - \sqrt{23}i}{6} \qquad \text{e} \qquad w_2 = -\frac{5 + \sqrt{23}i}{6}.$$

4. Algumas Aplicações

Apresentamos aqui algumas aplicações do Teorema 1 em forma de corolários, buscando estabelecer condições para identificar os tipos de raízes de um polinômio do terceiro grau. O primeiro corolário pode ser deduzido a partir do Teorema de Rolle (cf. Lima [4], p. 270), no entanto trazemos uma prova mais elementar.

Corolário 1. *Dado um polinômio do terceiro grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com coeficientes reais satisfazendo*

$$\Omega := b^2 - 3ac < 0 \qquad ou \qquad \Lambda := c^2 - 3bd < 0,$$

então $P(x)$ possui duas raízes complexas.

Demonstração. Primeiramente, dividimos a prova em dois casos:

1º Caso: $\Omega < 0$.

Usando os coeficientes de $P(x)$, definimos o polinômio quadrático

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

que satisfaz

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) = 16a^2\Omega < 0$$

e portanto

$$R(x) > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \Omega - aP'(r) &= -a(3ar^2 + 2br + c) + (b^2 - 3ac) \\ &= -[3a^2r^2 + 2abr - (b^2 - 4ac)], \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Omega - aP'(r) \;=\; -R(r) \;<\; 0,$$

implicando pelo Teorema 1 que $P(x)$ possui duas raízes complexas.

2º Caso: $\Lambda < 0$.

Usando as mesmas notações anteriores, vamos ter

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}(dx^3 + cx^2 + bx + a),$$

para todo x não nulo. Desde que a constante Λ é negativa, obtemos

$$c^2 < 3bd,$$

portanto $d \neq 0$, e, pelo caso anterior, concluímos que

$$S(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

possui duas raízes complexas, ocorrendo o mesmo para o polinômio $P(x)$. □

A condição apresentada no Corolário 1 é suficiente, porém não é necessária para a existência de raízes complexas; basta considerar o contraexemplo $P(x) = x^3 + 1$. O próximo corolário contempla casos como esse contraexemplo.

Corolário 2. *Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$. Suponha que $\Omega := b^2 - 3ac \geq 0$, então vale a desigualdade*

$$\left|r + \frac{b}{3a}\right| \leq \frac{2\sqrt{\Omega}}{3|a|},$$

se, e somente se, todas as raízes de $P(x)$ são reais.

Demonstração. Por hipótese, temos que

$$\Omega = b^2 - 3ac \geq 0,$$

então os coeficientes do polinômio

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

devem satisfazer

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) = 16a^2\Omega \geq 0.$$

Nessas condições, podemos afirmar que

$$\left|r + \frac{b}{3a}\right| \leq \frac{2\sqrt{\Omega}}{3|a|}, \tag{6}$$

se, e somente se,

$$\Omega - aP'(r) = -R(r) \geq 0.$$

Por fim, decorre do Teorema 1 que essa desigualdade equivale a afirmar que todas as raízes de $P(x)$ são necessariamente reais. $\square$

Observação 5. Se para alguma das raízes reais de $P(x)$, tivermos a igualdade atingida em (6), verifica-se diretamente que $P(x)$ admite uma raiz real de multiplicidade dois ou três.

Decorre do Teorema de Rolle que se um polinômio $P(x)$ do terceiro grau possui apenas raízes reais, então uma de suas raízes satisfaz a desigualdade $aP'(r) \leq 0$, onde "a" denota o coeficiente líder. No nosso último corolário, apresentamos a recíproca desse resultado.

Corolário 3. *Um polinômio do terceiro grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ possui apenas raízes reais, desde que ocorra uma das condições a seguir:*

(a) $P(x)$ possui coeficiente líder positivo e admite uma raiz real com derivada não positiva.

(b) $P(x)$ possui coeficiente líder negativo e admite uma raiz real com derivada não negativa.

Demonstração. Supondo que se verifica um dos itens (a) ou (b), então $P(x)$ admite uma raiz $r \in \mathbb{R}$, tal que

$$aP'(r) \leq 0, \tag{7}$$

em particular, os coeficientes do polinômio quadrático

$$aP'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ac$$

satisfazem

$$\Delta_{(aP')} = 4a^2(b^2 - 3ac) = 4a^2\Omega \geq 0.$$

Da última desigualdade, obtemos

$$\Omega \geq 0, \tag{8}$$

implicando por (7) e (8) que

$$\Omega - aP'(r) \geq 0,$$

por fim, concluímos do Teorema 1 que $P(x)$ possui apenas raízes reais. $\square$

Agradecimentos

Os autores agradecem ao(s) parecerista(s) pelas relevantes observações e valiosas sugestões apresentadas.

Referências

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática*. 3^a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

[2] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. 5^a ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013

[3] Lima, E. L. *Equação do Terceiro Grau*. Matemática Universitária, v. 5, pp. 10-23, 1987.

[4] Lima, E. L. *Curso de Análise - Volume 1*, 10^a ed. Rio de Janeiro: Impa, 2002.

[5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 10^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] Lopes, V. L. R.; Ruggiero, M. A. G. *Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais*. $2^{\underline{a}}$ ed. São Paulo: Makron Books, 1997.

[7] Rechtschaffen, E. E. M. *Sobre Aproximações Polinomiais de Raízes Reais de Cúbicas*. Matemática Universitária, v. 46, pp. 12-16, 2009.

João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional
da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab
<joaofilho@unilab.edu.br>

Odete Elana Sousa Pereira
Universidade Federal do Ceará - UFC
<odetelana@hotmail.com>

Recebido: 28/07/2019
Publicado: 15/10/2019