PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.4, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836

Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas

Eudes Antonio Costa   Douglas Catulio dos Santos

Resumo

Neste artigo relatamos nossa experiência em uma oficina de resolução de problemas, em que participavam estudantes a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental, com objetivo de treinamento para competição matemática. Nela enfatizamos a importância entre a resolução de problemas e o processo de aprendizagem dos conceitos aritméticos associados aos números *repunidades* (repetição de unidade), buscando o desenvolvimento de habilidades nos estudantes, tais como: investigar, descobrir, propor, conjecturar e validar conceitos acerca dos números *repunidades*, explorando situações-problemas.

Palavras-chave: Habilidades; Números *Repunidades*; Resolução de problemas.

Abstract

In this we report an experience in a problem-solving workshop, in which students from the seventh grade of elementary school (training for competitions in mathematics) participated. In it we emphasize the importance between problem solving and the learning process of the arithmetic concepts associated with the numbers *repunits*, seeking the development of skills in students, such as: investigate, discover, propose, conjecture and validate concepts about numbers *repunits* by exploring problem.

Keywords: Numbers *Repunits*; Problem solving; Skills.

1. Introdução

Diante dos dados acerca da avaliação do ensino de Matemática na educação básica no Brasil, que indica que aproximadamente "68% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática", veja o Pisa 2018 [7], fica evidenciada a necessidade de explorarmos alternativas no ensino de matemática, e utilizar abordagens ou estratégias que valorizem o estudante no processo de aprendizagem Matemática. Nesse sentido, George Polya [8] apregoa que o estudante deve tornar-se independente e competente na resolução de problemas. Ele descreve uma série de heurísticas, estratégias práticas (preparadas pelo professor), que os auxiliam na resolução de problemas, enfatizando assim o papel de destaque do estudante no processo de sua aprendizagem. Portanto, a independência do estudante na resolução do problema está associada ao trabalho planejado e supervisionado pelo professor; para exemplificar: na preparação de ferramentas matemáticas necessárias, seleção de problemas e acompanhar a resolução. Isso nos leva a concluir

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

que a Matemática não pode ser apreendida sem a interação ou participação ativa do indivíduo. Aqui apresentamos nossa experiência em uma oficina de resolução de problemas. Nelas utilizamos a resolução de problemas como ferramenta de ensino para a sistematização de conceitos inerentes aos números *repunidades* ou *repunits*, favorecendo o papel de protagonista do estudante no seu aprendizado.

2. Números Repunidades

Os números *repunidades* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, denotado por **R1**, que apresentam um padrão e algumas propriedades bem definidas, as quais despertam o interesse de matemáticos no decorrer do tempo.

De acordo com Carvalho e Costa [3], o termo *repunidade*, em inglês *repunit*, foi usado primeiramente por Beiler em seu trabalho *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains* em 1964, referindo-se aos números naturais $\mathrm{R_n}$ que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1, n vezes. Assim, para todo $\mathrm{n} \geq 1$, $\mathbf{R1} = \{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \cdots,\ \mathrm{R_n}, \cdots\}$ representa o conjunto dos números *repunidades*.

Coube a Beiler também a apresentação da fatoração de alguns $\mathrm{R_n}$, mostrando ainda a existência de primos pertencentes ao conjunto **R1** que ficaram conhecidos como primos *repunidades*, em outras palavras, números naturais que são primos e *repunidades* ao mesmo tempo; por exemplo $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{R_{19}}$ e $\mathrm{R_{23}}$.

Inicialmente apresentamos a definição do número *repunidade*, escrevemos alguns exemplos e a seguinte lista de problemas e deixamos os alunos fazerem uma busca sobre o assunto e problemas correlatos. Em outro momento discutimos cada resolução e exploramos algumas propriedades, exemplos ou padrões:

Problema 1. [1, Problema 6.1] Roberto quer escrever o número $\mathrm{R_6} = 111111$ como um produto de dois números, nenhum deles terminado em 1. Isso é possível ?

Problema 2. Mostre que 37 divide $\mathrm{R_{3k}}$, para todo k natural.

Problema 3. [1, Problema 2.25] Considere os números $\mathrm{A} = \underbrace{111\cdots 11}_{\text{2n algarismos}}$ e $\mathrm{B} = \underbrace{444\cdots 44}_{\text{n algarismos}}$. Verifique que para todo n natural $\mathrm{A + B + 1}$ é um quadrado perfeito e calcule sua raiz quadrada.

Problema 4. [4, Problema 56] Mostre que $(111)_\mathrm{b} \mid (10101)_\mathrm{b}$ para todo $\mathrm{b} > 1$. Escreva o quociente da divisão em termos da base b.

3. Resolução do Problema 1

Recordemos que o resto da divisão de um número inteiro por 3 é igual ao resto da divisão da soma de seus algarismos por 3; esse é o critério de divisibilidade por 3. Sugerimos que eles verifiquem e ressaltamos que o critério de divisibilidade por 9 é similar. Agora apresentamos a

Resolução: do Problema 1

Veja que soma dos algarismos de $\mathrm{R_6} = 111111$ é 6; pelo critério de divisibilidade por 3, temos que $\mathrm{R_6}$ é múltiplo de 3, donde obtemos que $\mathrm{R_6} = 3 \times 37037$. Essa é a primeira resposta encontrada pelos estudantes.

Uma pergunta interessante é se existem outros pares de números, cujo produto obedeça a condição estabelecida. Escrevendo R_6 em notação decimal expandida (polinomial), percebemos que:

$$\begin{aligned} R_6 &= 111111 \\ &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\ &= 10^4(10+1) + 10^2(10+1) + (10+1) \\ &= 11 \cdot (10^4 + 10^2 + 1)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Assim, a Equação (1) garante que R_6 é múltiplo de $R_2 = 11$. Como já notamos, R_6 é múltiplo comum de 3 e 11, e podemos fatorar R_6 (testando para alguns primos ”pequenos”) e determinar

$$R_6 = 111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37\ .$$

No produto, desejamos 1 na 1ª ordem, assim precisamos que os fatores contenham na 1ª ordem, respectivamente: 3 e 7 ou 9 e 9; logo, as possibilidades de escrita de produtos que respeitem os termos definidos são: 3×37037; 7×15873; 13×8547; 33×3367; 37×3003; 39×2849; 77×1443; 143×777; 259×429; 407×273. Portanto, existem 10 possibilidades de escrita de R_6 como produto de dois números naturais não terminados em 1. •

Na sequência exibimos a tabela retirada de Carvalho e Costa [3] com a fatoração de R_n com $2 \leq n \leq 19$.

n	R_n	**Fatoração**
2	11	Primo
3	111	3×37
4	1111	11×101
5	11111	41×271
6	111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	1111111	239×4649
8	11111111	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	111111111	$3^2 \times 37 \times 3336677$
10	1111111111	$11 \times 41 \times 271 \times 9091$
11	11111111111	21649×513239
12	111111111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$
13	1111111111111	$53 \times 79 \times 265371653$
14	11111111111111	$11 \times 239 \times 4649 \times 909091$
15	111111111111111	$3 \times 31 \times 37 \times 41 \times 271 \times 2906161$
16	1111111111111111	$11 \times 17 \times 73 \times 101 \times 137 \times 5882353$
17	11111111111111111	$2071723 \times 5363222357$
18	111111111111111111	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52579 \times 333667$
19	1111111111111111111	Primo
...	...	...

Tabela 1: Fatores primos de R_n [3]

A exploração do Problema 1, a observação da Tabela 1, questionamentos e atividades preparadas pelo professor, instiga os estudantes a algumas observações ou conjecturas. Apresentamos algumas proposições relativas aos números *repunidades* $\mathrm{R_n}$, cujas demonstrações encontram-se em [3].

Proposição 1. *[3, Afirmação 1] Para todo* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, *se* n *é múltiplo de 3, então,* $\mathrm{R_n}$ *também é.*

Proposição 2. *[3, Afirmação 2] Para todo* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, *se* n *é um número par, então,* $\mathrm{R_n}$ *é múltiplo de 11.*

Como consequência da Proposição (2), temos

Corolário 1. *[4, Exercício 282] Para todo* $\mathrm{n} \geq 2$ *natural, tem-se* $\mathrm{R_{2n}}$, *que é composto.*

Exemplo 1. Temos $\mathrm{R_6} = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, enquanto que $\mathrm{R_{12}} = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$, associado à Proposição (1) e a Proposição (2). Podemos generalizar para o resultado seguinte.

Proposição 3. *[3, Afirmação 3] Para todo* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, *se* n *é múltiplo de 6, então,* $\mathrm{R_n}$ *é múltiplo de 3, 7, 11 e 13.*

4. Resolução do Problema 2

Antes de mostrarmos a resolução para Problema 2, vejamos algumas propriedades.

Proposição 4. *[3, Afirmação 4] Para quaisquer* $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, *se* n *é múltiplo* m, *então,* $\mathrm{R_n}$ *é múltiplo de* $\mathrm{R_m}$.

Exemplo 2. Temos $\mathrm{R_6} = 10101 \times \mathrm{R_2}$, ou ainda que $\mathrm{R_6} = 1001 \times \mathrm{R_3}$. E mais, $\mathrm{R_8} = 1010101 \times \mathrm{R_2} = 10001 \times \mathrm{R_4}$.

Segue diretamente da Proposição (4) que

Corolário 2. *Para todo* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, *se* $\mathrm{R_n}$ *é primo, então,* n *é primo.*

No entanto, a recíproca do Corolário (2) não é verificada, uma vez que $\mathrm{n} = 3$ e $\mathrm{n} = 5$ são primos; contudo, sabemos que $\mathrm{R_3}$ e $\mathrm{R_5}$ são compostos (Tabela 1).

De acordo com Carvalho e Costa [3], mesmo com o avanço da tecnologia, ainda existe uma dificuldade computacional para a verificação da primalidade de $\mathrm{R_n}$, basta considerar $\mathrm{R_n}$ com milhares de algarismos. Além da primalidade de $\mathrm{R_n}$ para $\mathrm{n} = 2$, 19 e 23 sabemos que $\mathrm{R_{217}}$ e $\mathrm{R_{1031}}$ também são primos. Uma questão em aberto é sobre a infinitude dos primos *repunidades*.

Resolução: do Problema 2
De acordo com a Proposição (4) temos que $\mathrm{R_{3k}}$ é múltiplo de $\mathrm{R_3}$, uma vez que $\mathrm{n} = 3\mathrm{k}$ é múltiplo de 3; sendo assim, obtemos que existe um natural q de forma que $\mathrm{R_{3k}} = \mathrm{R_3} \times \mathrm{q}$. Pela Tabela 1 observamos que $\mathrm{R_3} = 3 \times 37$; isso acarreta em $\mathrm{R_{3k}} = 3 \times 37 \times \mathrm{q} = 37 \times (3\mathrm{q})$. •

5. Resolução do Problema 3

Em Brito [2] temos a seguinte caracterização para um número *repunidade*. Para todo n natural temos:

$$\begin{cases} \mathrm{R_1} = & 1 \\ \mathrm{R_{n+1}} = & 10\mathrm{R_n} + 1, \mathrm{n} \geqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Dessa maneira podemos definir os números *repunidades* recursivamente pela equação (2).

Exemplo 3. Observe que $R_2 = 11 = 10 \times R_1 + 1$, enquanto $R_3 = 111 = 10 \times R_2 + 1$. Veja ainda que $\text{mdc}(R_3, R_2) = 1$.

De um modo geral temos que

Proposição 5. *Dois números repunidades consecutivos são coprimos.*

Demonstração. Basta observar que $\text{mdc}(R_{n+1}, R_n) = 1$ para todo n natural. □

Apresentamos agora um resultado que estabelece uma expressão que gera os números *repunidades* R_n no sistema decimal, que dependa exclusivamente do valor de n e não mais (recursivamente) da *repunidade* anterior. Posteriormente tal notação será usada para generalizar um número *repunidade* em uma base $b \geq 2$ qualquer.

Proposição 6. *[1, Problema 3.30] Para todo* $n \in \mathbb{N}^*$, *temos* $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Exemplo 4. Veja que $R_1 = 1 = \dfrac{10^1 - 1}{9}$, $R_2 = 11 = \dfrac{10^2 - 1}{9}$ e $R_3 = 111 = \dfrac{10^3 - 1}{9}$.

Demonstração. **da Proposição 6**
(Os estudantes já conheciam o princípio de indução finita)

Aplicamos indução em n. Para $n = 1$ é fácil perceber que $R_1 = 1 = \dfrac{10^1 - 1}{9}$, o que garante a validade da sentença para $n = 1$.

Suponhamos que para algum $n > 1$, a sentença $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ é válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} R_{n+1} &:= 10R_n + 1 \\ &= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 \\ &= \frac{10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 1}{9} . \end{aligned} \tag{3}$$

Isso garante a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Agora, a **Resolução: do Problema 3**
Note que pela Proposição (6) temos

$$A = R_{2n} = \underbrace{111 \cdots 11}_{2n \text{ algarismos}} = \frac{10^{2n} - 1}{9} \quad \text{e}$$

$$B = 4 \times R_n = 4 \times (\underbrace{111 \cdots 11}_{n \text{ algarismos}}) = 4 \times \frac{10^n - 1}{9} \ , \ ,$$

assim:

$$\begin{aligned} A+B+1 &= \frac{10^{2n}-1}{9} + 4\times\frac{10^n-1}{9}+1 \\ &= \frac{10^{2n}-1+4\times 10^n-4+9}{9} \\ &= \frac{10^{2n}+4\times 10^n+4}{9} \\ &= \frac{(10^n+2)(10^n+2)}{9} \\ &= \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Portanto, para todo n natural $A+B+1$ é um quadrado perfeito, e sua raiz quadrada é $\frac{10^n+2}{3}$. •

6. Resolução do Problema 4

Nesta seção apresentaremos algumas características dos números *repunidades* em outra base numérica $b \geq 2$, além da decimal. Snyder [9] propôs uma generalização para os números *repunidades* e algumas propriedades aritméticas de R_n para qualquer base numérica inteira $b \geq 2$, em que $R_n(b) = b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1 = (\underbrace{111\cdots 11}_{\text{n algarismos}})_b$, é um número *repunidade generalizado* ou *repunidade* em uma base b.

Exemplo 5. Veja que $R_3(3) = (111)_3 = 3^2 + 3^1 + 3^0$, da mesma forma que $R_3(7) = (111)_7 = 7^2 + 7^1 + 7^0$.

Resolução: do Problema 4
Temos que $R_3(b) = b^2 + b + 1$; de modo semelhante temos que $(10101)_b = b^4 + b^2 + 1$. Veja ainda que $(10101)_b = b^4 + b^2 + 1 = (b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$, portanto $R_3(b) \mid (10101)_b$ para toda base numérica $b \geq 2$. •

De modo geral temos:

Proposição 7. *[9] Dada uma base numérica inteira $b \geq 2$, então, $R_n(b) = \frac{b^n-1}{b-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para uma base numérica $b \geq 2$ fixada, basta efetuar a divisão polinomial $R_n(b) = \frac{b^n-1}{b-1}$. □

7. Mais duas propriedades

Consideremos a expressão

$$X = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + 111111 = R_1 + \cdots + R_6\ ,$$

claramente temos que $X = 123456$. Agora, para o caso em que a quantidade de termos é maior, usamos o seguinte resultado:

Proposição 8. *[1, Problema 3.10] Seja* $(\mathrm{R}_k)_{k\geq 1}$ *um número repunidade. Então:*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} .$$

Demonstração. Faremos por indução em n. Para $n = 1$ temos que $\sum_{k=1}^{1} \mathrm{R}_k = \dfrac{10^{1+1} - 9 \times 1 - 10}{81} = \dfrac{81}{81} = 1$. O que garante a validade da proposição para $n = 1$.

Suponha que para algum $n > 1$ a sentença $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{R}_k &:= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k + \mathrm{R}_{n+1} \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10 + 9 \times 10^{n+1} - 9}{81} \\ &= \frac{10 \times 10^{n+1} - 9n - 9 - 10}{81} \\ &= \frac{10^{n+2} - 9(n+1) - 10}{81} . \end{aligned}$$

E temos a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Outro fato curioso foi ao observar a Tabela 1 e constatar que

Proposição 9. *[5, Problema 3.32], [6, Problema 4] Exceto* $\mathrm{R}_1 = 1$, *nenhum outro* R_n *é um quadrado perfeito ou adição de dois quadrados perfeitos.*

Demonstração. Aqui utilizaremos os seguintes fatos: *um quadrado perfeito é da forma* $4q$ *(par) ou* $4q + 1$ *(ímpar)*, e portanto *nenhum quadrado perfeito pode ser da forma* $4q + 3$ (já conhecido pelos discentes).

Para $n \geq 2$ temos:

$$\mathrm{R}_n = \underbrace{111 \cdots 111}_{n \text{ algarismos}} = 10^2(\underbrace{111 \cdots 1}_{n-2 \text{ algarismos}}) + 11 .$$

Como 4 divide 10^2, e $11 = 4 \times 2 + 3$, obtemos que $\mathrm{R}_n = 4q + 3$, para algum inteiro positivo q. Como nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, então podemos concluir que, exceto R_1, nenhum outro número *repunidade* será quadrado perfeito.

Para verificarmos que exceto o R_1 nenhuma outra *repunidade* é escrita como a soma de dois quadrados perfeitos, consideramos a Tabela 2:

+	$4q_1$	$4q_1 + 1$
$4q_2$	$4(q_1 + q_2) = 4q$	$4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$
$4q_2 + 1$	$4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$	$4(q_1 + q_2) + 2 = 4q + 2$

Tabela 2: Adição do quadrados perfeitos da forma $4q + r$

De acordo com a Tabela 2, a soma de dois quadrados perfeitos será da forma $4q$, $4q + 1$ ou $4q + 2$; então, como R_n é da forma $4q + 3$, podemos concluir que R_n não pode ser escrito como a adição de dois quadrados perfeitos. $\square$

8. Considerações finais

Na oficina, o estudo dos números *repunidades* e as propriedades aritméticas são uma elaboração colaborativa com buscas ou consultas. Aqui relatamos parte do que vivenciamos em nossa prática pedagógica. Ao fazermos uso da resolução de problemas como ferramenta de ensino de Matemática, favorecemos uma aprendizagem ativa e participativa em que o estudante é desafiado a apreender a partir do seu próprio empenho, tornando possível que ele descubra, investigue, conjecture, proponha e valide conceitos e habilidades matemáticas acerca do objeto de aprendizagem ou conhecimento por ele estudado, evidenciando um protagonismo nesse processo.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente desenvolvido durante a elaboração da dissertação de Mestrado do segundo autor quando era discente do Profmat UFT-Arraias.

Referências

[1] BRASIL-OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Banco de Questões (Diversos). SBM : Impa.

[2] BRITO, F. R. M. **Números Místicos.** *Revista do Professor de Matemática*, 58. Disponível em <rpm.org.br/cdrpm//58/7.htm>.

[3] CARVALHO, F. S. e COSTA, E. A. **Escrever o números** $111 \cdots 111$ **como produto de dois números.** *Revista do Professor de Matemática*, 87. Disponível em <rpm.org.br/cdrpm/87/36.html>.

[4] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 2ª ed. Florianopólis-SC. Ed. da UFSC, 2003.

[5] HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ. SBM, 2016.

[6] PEREIRA, V. R. F. **Domingo regado a Repunits**. Eureka 29 (SBM-OBM). <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka_29.pdf>.

[7] PISA. **Programme for international assessment** . 2018. OECD. Disponível em <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf>.

[8] POLYA. G. **A Arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2003.

[9] SNYDER, W. M. **Factoring repunits**. The American Mathematical Monthly 89.7 (1982): 462-466 .

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins - UFT
<eudes@uft.edu.br>

Douglas Catulio dos Santos
Universidade Federal do Tocantins - UFT
<catulio.douglas@uft.edu.br>

Recebido: 20/01/2020
Publicado: 15/10/2020