PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.4, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo839

# A circunferência de centro na origem como produto de matrizes

Marina França Oliveira    Cleidinaldo Aguiar Souza

**Resumo**

Um problema recorrente em educação básica é o fato de ser o conteúdo de matrizes geralmente apresentado aos alunos sem aplicações e relação entre outros conteúdos dentro da matemática, e mesmo entre outras disciplinas da rede básica de ensino. Muitas vezes essa maneira de apresentar tal conteúdo acaba desmotivando os alunos, pois muitos só conseguem fixar a teoria matemática associando com algo concreto. Pensando nisso, apresentaremos uma circunferência com centro na origem, por meio do produto de matrizes fazendo uma relação entre geometria e álgebra, obtendo uma interpretação geométrica, o que nos permite estudar a trajetória descrita por um robô.

**Palavras-chave:** Circunferência; Matrizes; Plano Cartesiano; Sistema Linear; Trajetória Descrita por um Robô.

**Abstract**

A recurring problem in basic education is the fact that the content of matrices is usually presented to students without applications and the relationship between other content within mathematics, and even among other subjects in the basic education network. Often this way of presenting this content ends up discouraging students, as many are only able to fix mathematical theory, associating it with something concrete. Thinking about it, we will present a circumference with center at the origin, through the product of matrices making a relationship between geometry and algebra, obtaining a geometric interpretation which allows to study the trajectory described by a robot.

**Keywords:** Circumference; Matrices; Cartesian Plan; Linear System; Trajectory Described by a Robot.

## 1. Introdução

Um problema clássico em robótica é guiar um robô de uma determinada posição inicial $P_0$ para uma posição final $P_f$ na presença de obstáculos. Diversas metodologias têm sido propostas para resolver esse problema, dentre elas podemos citar: métodos de planejamento de caminhos em ambientes desconhecidos proposto em (de Lima Ottoni e Lages, 2005), métodos baseados em sensores e inspirados pela biologia podem ser vistos em (Tavares Neto e dos Santos Coelho, 2005), e o método estocástico proposto em (Adorno e Borges, 2006). Todas essas metodologias dependem da escolha de um caminho no ambiente por onde o robô irá se deslocar.

Estudantes que dominam as ferramentas apresentadas nos cursos de Cálculo têm facilidade em estudar trajetórias descritas por robôs. Estudantes da rede básica de ensino, porém, têm grande dificuldade em estudar essas trajetórias, por não possuírem ferramentas necessárias para tal finalidade.

Em geral, em educação básica, um dos maiores desafios do ensino de matemática é apresentar aos alunos conteúdos que se complementem e que se desenvolvam, exigindo que o educando, para além de reproduzir fórmulas aparentemente isoladas, desenvolva a capacidade de ler, escrever, interpretar e produzir os elementos, durante o processo de alfabetização matemática, de maneira eficaz. Em particular, um conteúdo que inúmeras vezes é trabalhado em educação básica de forma abstrata, sem apresentar qualquer relação com outras áreas do conhecimento ou até mesmo com outros conteúdos dentro da matemática, é o das matrizes.

Segundo Polya (*apud* SIQUEIRA FILHO, 2013), a resolução de um problema matemático divide-se em quatro etapas. Essas etapas são: "compreender, estabelecer um plano, executar o plano e realizar a verificação". Sendo assim, observa-se que a resolução de um problema não consiste apenas em descobrir o resultado final, é muito mais do que isso. Envolve compreensão, elaboração de plano, execução do plano elaborado e posteriormente a verificação, que permitirá observar quais os resultados gerados pelo plano elaborado anteriormente.

Em 1858 Arthur Cayley, matemático inglês, com o famoso trabalho *Memoir on the Theory of Matrices* divulgou esse nome e demonstrou sua utilidade, dando notoriedade ao que hoje conhecemos como Teoria Matricial. ,

> *Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, as imagens digitais etc.* (Iezzi, 2016, p.77)

Além de Arthur Cayley, foram muitas as contribuições, e ressaltamos o trabalho do matemático Joseph Louis Lagrange, sendo o primeiro a usar o conceito de matrizes para estudar máximos e mínimos de uma função real.

Uma das consequências desse estudo foi que a teoria das formas quadráticas, que antes eram tratadas apenas escalarmente como um polinômio homogêneo de grau dois, ou seja:

$$q(x,\ y) \ = \ ax^2 + 2bxy + cy^2, \tag{1}$$

após Lagrange, passaram a ser estudadas por meio da notação matricial, dada da seguinte maneira:

$$q(x,\ y) \ = \ [x\ y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Exibir uma matriz quadrada de ordem dois que satisfaz a equação (2) não é um processo simples, e quase sempre se precisa utilizar conceitos de álgebra linear estudados na matemática superior, como a ortogonalização de vetores e o teorema espectral para matrizes simétricas.

Nesse sentido, apresentamos a circunferência de centro na origem de um modo diferente, como um produto de matrizes, unindo, assim, dois conteúdos que, segundo os parâmetros nacionais curriculares (PCNs), são apresentados aos discentes em séries distintas e quase sem nenhuma relação. Além disso, utilizaremos essa maneira de escrever a circunferência, para estudar a trajetória descrita por um robô.

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção (2) desenvolvemos três proposições, que são os resultados principais, de tal modo que quando combinadas mostram que a circunferência de centro na origem é obtida como um produto de matrizes. Na seção (3), apresentaremos uma maneira de como percorrer a trajetória descrita entre dois pontos de uma circunferência centrada na origem, apenas utilizando o produto de matrizes, e utilizaremos esse resultado para determinar a trajetória descrita por um robô na presença de obstáculo. Na seção (4), finalizaremos o trabalho com a conclusão.

## 2. Desenvolvimento

Nesta seção representaremos uma circunferência de centro na origem, como um produto de matrizes. Para isso, identificaremos os pontos de um plano através de matrizes. Seja um plano $\pi$ com um sistema de eixos ortogonais OXY; podemos representar o plano $\pi$ da seguinte maneira:

$$\pi = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) : \quad \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, cada ponto $\tilde{\mathrm{P}} = (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \pi$ será representado de modo natural por uma matriz coluna, isto é

$$\mathrm{P} = \tilde{\mathrm{P}}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix},$$

onde $\tilde{\mathrm{P}}^{\mathrm{t}}$ é a matriz transposta de $\tilde{\mathrm{P}}$.

De acordo com (Iezzi, 2016), uma circunferência com centro no ponto $\mathrm{O} = \left(\mathrm{x_o},\mathrm{y_o}\right)$ e raio de medida $r$, denotada por $\mathscr{C}_{\mathrm{r}}(\mathrm{O})$, é o conjunto de todos os pontos $\mathrm{P} = (\mathrm{x},\mathrm{y})$ do plano $\pi$ que distam $r$ do ponto O:

$$\mathrm{d_{PO}} = \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x_o})^2 + \left(\mathrm{y}-\mathrm{y_o}\right)^2} = \mathrm{r}^2, \tag{3}$$

elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(\mathrm{x}-\mathrm{x_o})^2 + \left(\mathrm{y}-\mathrm{y_o}\right)^2 = \mathrm{r}^2 \tag{4}$$

chamada *equação reduzida da circunferência*. Em particular, quando o centro da circunferência é o ponto $\mathrm{O} = (0,0)$, denotaremos a circunferência apenas por $\mathscr{C}_{\mathrm{r}}$. Nesse caso, pela equação (4), escrevemos a circunferência com centro na origem e raio $\mathrm{r} > 0$ da seguinte maneira:

$$\mathscr{C}_{\mathrm{r}} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \pi : \quad \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{r}^2\}. \tag{5}$$

Como uma circunferência $\mathscr{C}_{\mathrm{r}}$ é um subconjunto do plano $\pi$, então naturalmente representaremos cada ponto P da circunferência $\mathscr{C}_{\mathrm{r}}$ por uma matriz coluna:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix},$$

tal que $x^2 + y^2 = r^2$.

Restringiremos as matrizes a ser estudadas, considerando apenas as matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n\times n}$ que satisfazem $A.A^t = A^t.A = I_n$, chamadas matrizes ortogonais. Equivalentemente, dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é ortogonal, se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Assim, reuniremos todas as matrizes ortogonais de ordem dois em um conjunto, denotado por $O_{(2)}$, dado por:

$$O_{(2)} = \{A = (a_{ij})_{2\times 2} : \quad A.A^t = A^t.A = I_2\}. \tag{6}$$

A partir de agora estaremos concentrados em mostrar que toda circunferência com centro na origem e raio $r > 0$ é obtida através do produto de matrizes ortogonais por um ponto $P_0 \in \mathscr{C}_r$. Para isso, utilizaremos três proposições, sendo que a primeira garante que o produto de uma matriz ortogonal de ordem 2 por um ponto da circunferência $\mathscr{C}_r$ ainda é um ponto em $\mathscr{C}_r$; as duas proposições seguintes fornecem uma recíproca para a primeira, e garantem que fixado um ponto $P_0 \in \mathscr{C}_r$, todo ponto pertencente a $\mathscr{C}_r$ pode ser escrito como o produto de uma matriz ortogonal de ordem dois por $P_0$.

**Proposição 1.** *Se* $P_0 \in \mathscr{C}_r$, *então* $A.P_0 \in \mathscr{C}_r$ *para toda matriz* $A \in O_{(2)}$.

*Demonstração.* Seja

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

dada uma matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

temos que

$$A \cdot P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix},$$

daí

$$\left(ax_0 + by_0\right)^2 + \left(cx_0 + dy_0\right)^2 = x_0^2\left(a^2 + c^2\right) + y_0^2\left(b^2 + d^2\right) + 2x_0y_0\left(ab + cd\right) \tag{1}$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot A = I_2,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$x_0^2 \cdot 1 + y_0^2 \cdot 1 + 2x_0y_0 \cdot 0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Temos ainda por hipótese que

$$P_0 \in \mathscr{C}_r \iff x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Portanto,

$$\left(ax_0 + by_0\right)^2 + \left(cx_0 + dy_0\right)^2 = r^2.$$

Assim, segue que

$$A \cdot P_0 \in \mathscr{C}_r$$

□

As proposições a seguir mostram que qualquer circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é um subconjunto do produto de $O_{(2)}$ por um ponto da própria circunferência $\mathscr{C}_r$.

**Proposição 2.** *Seja* $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ *um ponto pertencente a circunferência* $\mathscr{C}_r$. *Se* $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *é um ponto arbitrário pertencente à circunferência* $\mathscr{C}_r$, *então existe uma matriz ortogonal*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix},$$

*tal que* $P = A.P_0$

*Demonstração.* Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ uma matriz ortogonal, tal que

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{cases} a = \frac{x}{r} \\ b = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Como $A \in O_{(2)}$, então,

$$A \cdot A^t = I_2 \iff \begin{bmatrix} \frac{x^2}{r^2} + c^2 & \frac{xy}{r^2} + cd \\ \frac{xy}{r^2} + cd & \frac{y^2}{r^2} + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue, por igualdade de matrizes, que

$$\frac{x^2}{r^2} + c^2 = 1 \iff c = \pm\frac{y}{r}.$$

Considere $c = \frac{y}{r}$ e substitua em $\frac{xy}{r^2} = -cd$ obtemos que

$$d = -\frac{x}{r}.$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix}.$$

□

Note que no caso em que

$$P_0 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix}, \ P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \ \text{ e } \ P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

para todo $r > 0$ a construção é análoga à obtida na Proposição (2).

De modo um geral, se o ponto $P_0$ não coincide com nenhum dos casos considerados na Proposição (2), ainda assim temos que todo ponto $P \in \mathscr{C}_r$ pode ser escrito da seguinte maneira $P = A.P_0$, onde $A \in O_{(2)}$. É o que garante a proposição a seguir.

**Proposição 3.** *Seja* $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ *um ponto qualquer pertencente à circunferência* $\mathscr{C}_r$*. Se* $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *é um ponto arbitrário pertencente à circunferência* $\mathscr{C}_r$*, então, existe uma matriz ortogonal*

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} \\ \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix},$$

*tal que* $P = A.P_0$.

*Demonstração.* Seja

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal tal que

$$\tilde{A}^t \cdot P_0 = P.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} a = \dfrac{x - cy_0}{x_0} & (1) \\ \\ b = \dfrac{y - dy_0}{x_0} & (2) \end{cases}$$

Por hipótese, temos que

$$\tilde{A}^t \cdot \tilde{A} = I.$$

Então,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(x-cy_0)^2}{x_0^2}+c^2 \quad ^{(3)} & \left(\dfrac{x-cy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{y-dy_0}{x_0}\right)+cd \quad ^{(4)} \\ \left(\dfrac{y-dy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{x-cy_0}{x_0}\right)+cd \quad ^{(5)} & \dfrac{(y-dy_0)^2}{x_0^2}+d^2 \quad ^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De (3), temos que

$$\frac{(x-cy_0)^2}{x_0^2}+c^2=1 \iff c^2r^2-c\left(2xy_0\right)+x^2-x_0^2=0 \ .$$

Resolvendo a equação de 2º grau em c, obtemos que

$$c \ = \ \frac{xy_0 \pm x_0y}{r^2} \quad ^{(7)} \ .$$

Considere o caso $c=\dfrac{xy_0+x_0y}{r^2}$. Por (1), temos

$$a \ = \ \frac{xx_0-yy_0}{r^2}..$$

Por (4) e por (7)

$$d \ = \ \frac{-xx_0+yy_0}{r^2}$$

Substituindo em (2), temos

$$b \ = \ \frac{x_0y+xy_0}{r^2}.$$

Assim,

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \dfrac{xx_0-yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0+xy_0}{r^2} \\ \dfrac{xy_0+x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0+yy_0}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, considerando $A=\tilde{A}^t$ temos que $A.P_0=P$, donde obtemos o desejado. □

Finalizaremos esta seção com a interpretação geométrica do produto de matrizes ortogonais de ordem dois por um ponto pertencente a $\mathscr{C}_r$. Fixado um ponto $P_0 \in \mathscr{C}_r$, pela Proposição (1), obtemos que $A.P_0 \in \mathscr{C}$ para toda matriz $A \in \mathscr{C}$. Reciprocamente, pelas Proposições (2) - (3), obtemos que todo ponto $P \in \mathscr{C}_r$ é dado por $P = A.P_0$ para alguma matriz ortogonal $A \in O_{(2)}$ como ilustra a Figura 1. Dessa forma,

$$\mathscr{C}_r=\{A.P_0: \quad P_0 \quad \in \quad \mathscr{C}_r \quad \text{com} \quad A.A^t=I_2\}. \qquad (7)$$

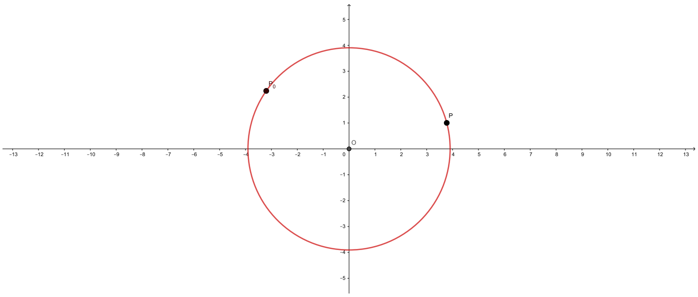

Figura 1: Cada ponto $P \in \mathscr{C}_r$ é obtido pelo produto $A.P_0$.

Em particular, fixando um ponto qualquer $P_0$ no plano $\pi$ com distância $r > 0$ da origem, e fazendo o produto das matrizes ortogonais dadas pela Proposição (3) por $P_0$, obtemos uma circunferência de centro na origem e raio r, como ilustra a Figura 2

$$\mathscr{C}_r = \{A.P_0 : \quad A \quad \in \quad O_2 \quad \text{com} \quad A.A^t = I_2\}. \tag{8}$$

De um modo mais simples, podemos fixar pontos no plano $\pi$ como o ponto $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, quando fazemos o produto das matrizes ortogonais dadas pela Proposição (2) por esses pontos, obtemos uma circunferência de centro na origem e raio $|\, r \,|$, como ilustra a Figura 2

$$\mathscr{C}_{|r|} = \{A.P_0 : \quad P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad A.A^t = I_2\}. \tag{9}$$

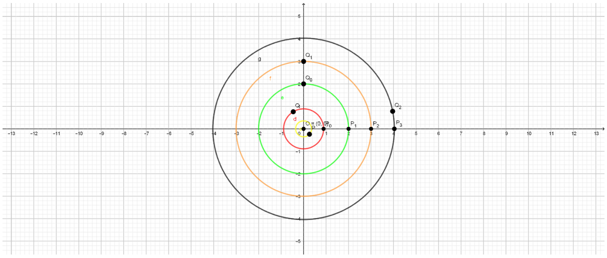

Figura 2: A partir de um ponto fixo no plano obtemos uma circunferência de centro na origem.

## 3. Aplicações

Como aplicação, estudaremos a trajetória descrita por um robô móvel no plano. Para isso, note que os pontos de uma circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ podem ser representados por um produto de matrizes. Dessa forma, partindo do ponto $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, podemos percorrer toda a circunferência $\mathscr{C}_r$ da seguinte maneira: seja $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ um ponto arbitrário sobre $\mathscr{C}_r$, pela Proposição (2) existe uma matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\[2ex] \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix},$$

tal que $P = A.P_0$. Como $P \in \mathscr{C}$, então por (4) temos que $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Dessa forma, para todo $r > x \geq -r$ obtemos que o ponto P percorre todo o arco com extremidades nos pontos $P_0$ e $-P_0$ no sentido anti-horário através do produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix},$$

com o ponto $P_0$, como ilustra a Figura 3.

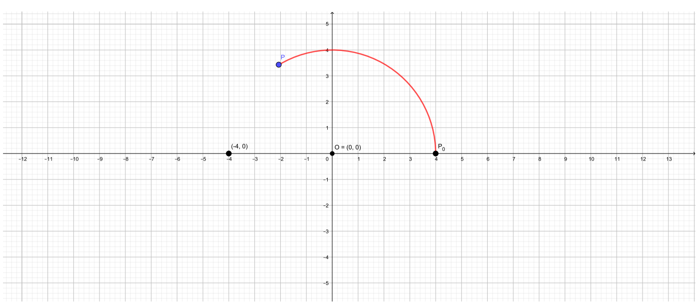


Figura 3: O deslocamento do ponto P ao longo de $\mathscr{C}_r$ partindo de $P_0$.

Continuando o processo acima, para todo $-r < x \leq r$ obtemos que o ponto P percorre todo o arco com extremidades nos pontos $-P_0$ e $P_0$ no sentido anti-horário através do produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix},$$

com o ponto $P_0$, como ilustra a Figura 4.

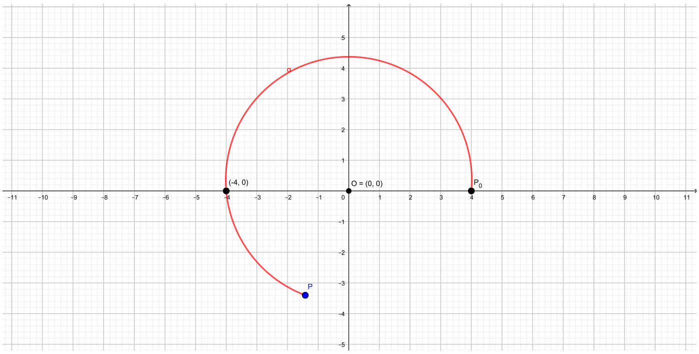


Figura 4: Continuação do deslocamento do ponto P ao longo de $\mathscr{C}_r$ partindo de $P_0$.

Em ambos os casos, $P = A.P_0$ representa a posição do ponto P sobre a circunferência $\mathscr{C}_r$. Isso significa que podemos nos deslocar do ponto $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, até um ponto qualquer $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, ao longo da circunferência $\mathscr{C}_r$ utilizando apenas o produto de matrizes ortogonais pelo ponto $P_0$. Isto é, se $P_1$ pertence ao arco de extremidades $P_0$ e $-P_0$, então,

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \\ \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

com $r > x \geq x_1$, representa a posição do ponto P, ao longo da circunferência $\mathscr{C}_r$, sobre o arco de extremidades $P_0$ e $P_1$, no sentido anti-horário.

Caso $P_1$ pertença ao arco de extremidades $-P_0$ e $P_0$, então o ponto dado pela equação (10) representa a posição do ponto P, ao longo de $\mathscr{C}_r$, sobre o arco de extremidades $P_0$ e $-P_0$, e, por sua vez,

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \\ \dfrac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $-r < x \leq x_1$ representa a posição do ponto P, ao longo da circunferência $\mathscr{C}_r$, sobre o arco de extremidades $P_0$ e $P_1$, no sentido anti-horário. O deslocamento no sentido horário é feito de modo análogo. Para ilustrar o que foi feito acima, daremos alguns exemplos.

**Exemplo 1.** Seja $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ um ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio 1.

Temos que $P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é dado pelo produto $P_2 = A.P_1$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal. Assim, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com x variando de 1 até $\frac{\sqrt{2}}{2}$, representam todas as posições ao longo de $\mathscr{C}_1$, sobre o arco de extremidades $P_1$ e $P_2$ no sentido anti-horário.

Dessa forma, o produto de matrizes $P_2 = AP_1$ implica, pela noção de deslocamento descrita acima, que percorremos todo o arco com extremidades $P_1$ e $P_2$ no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 5.

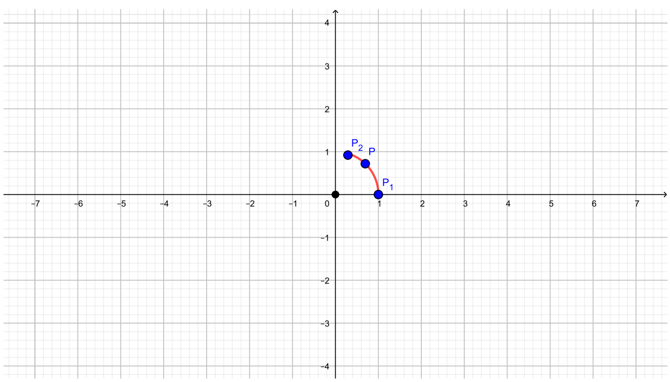


Figura 5: Interpretação geométrica para o produto de matrizes $A.P_1$.

**Exemplo 2.** Seja $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ um ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio 1. Temos que $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ é dado pelo produto $P_2 = A.P_1$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal. Assim, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com x variando de 1 até -1, representam todas as posições ao longo de $\mathscr{C}_1$, sobre o arco de extremidades $P_1$ e $-P_1$ no sentido anti-horário. Por outro lado, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com x variando de -1 até 0, representam todas as posições ao longo de $\mathscr{C}_1$, sobre o arco de extremidades $-P_1$ e $P_2$ no sentido anti-horário.

Dessa forma, o produto de matrizes $P_2 = AP_1$ implica, pela noção de deslocamento descrita acima, que percorremos todo o arco com extremidades $P_1$ e $P_2$ no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 6.

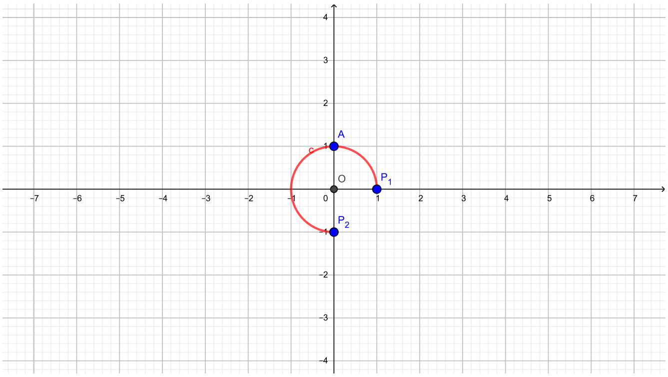


Figura 6: Interpretação geométrica para o produto de matrizes $A.P_1$.

Considere, por exemplo, um robô omnidirecional, isto é, robôs que usam rodas com rolamentos sobre a sua superfície de contato, como ilustra a Figura 7:

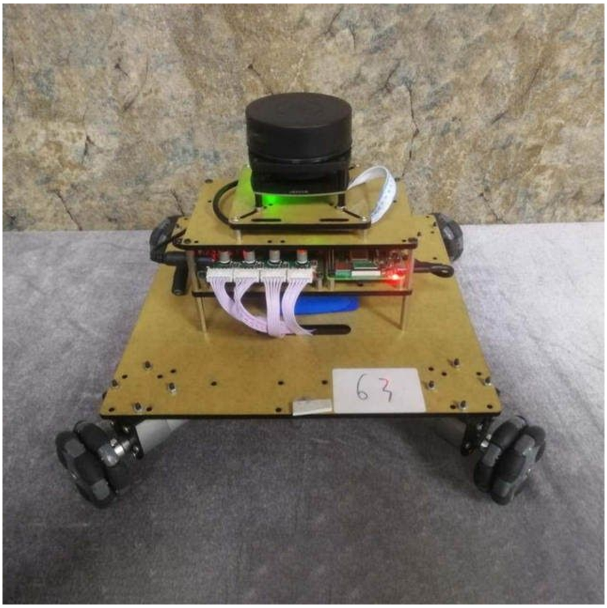


Figura 7: Robô omnidirecional.
Fonte: https://m.pt.aliexpress.com/item/4000238285160.html.

Suponhamos um robô omnidirecional, possuindo restrições no seu movimento, com 1 metro de largura por 1 metro de comprimento e 0,5 metro de altura, em uma obra de transformação de uma antiga casa de 144 metros quadrados, em um galpão. Na obra ainda restam duas paredes da casa antiga, sendo que a maior delas tem 4,45 metros e a parede menor tem 2,83 metros. Considerando um plano $\pi$, as duas paredes interceptam-se na origem do plano formando um ângulo de 90º; sobre o eixo vertical encontram-se as escavações, medindo 3 metros de comprimento a partir da origem das futuras instalações do sistema de esgoto. Além disso, a 5 metros da origem, sobre o eixo vertical está localizado um banheiro de uso coletivo dos funcionários da obra. O robô irá trabalhar dentro da obra, deslocando-se no plano com velocidade baixa e constante. À medida que o robô se mova ao longo do plano, cada posição P pode ser representada por uma matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Consideremos um robô com posição inicial $P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, queremos que esse robô desloque-se ao longo do plano até uma posição final $P_f = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$, como ilustra a Figura 8:

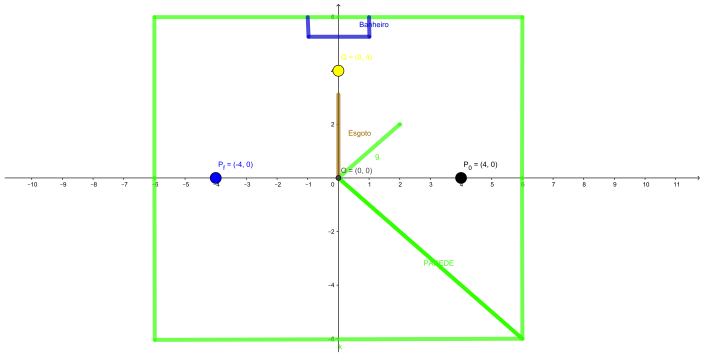


Figura 8: Obstáculos para a trajetória de um robô .

O robô não pode se deslocar em linha reta, pois se traçarmos um seguimento de reta entre as posições $P_0$ e $P_f$ encontraremos como obstáculo uma parede de concreto; muito menos deslocar-se através de vários segmentos de reta, pois devido a sua restrição de movimento, uma possível trajetória por composição de segmentos de retas ficaria muito longa, o que ocasionaria desperdício de energia. Poderíamos tentar uma trajetória descrita pelo gráfico de uma função polinomial de grau dois, porém, devido as suas dimensões, o robô terá que passar pelo ponto $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ e em uma trajetória descrita por uma função polinomial de grau dois passando pelos ponto $P_0$, Q e $P_f$, o robô acabaria tocando a parede de menor comprimento. Portanto, essa trajetória também está descartada.

Como $P_f = A.P_0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz ortogonal, então considerando todas as posições descritas por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{x}{4} & \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} \\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} & -\frac{x}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

com $4 > x \geq -4$, podemos percorrer uma trajetória partindo do ponto $P_0$ até o ponto $P_f$, ao longo de uma circunferência centrada na origem e raio 4 metros, no sentido anti-horário. Através dessa trajetória conseguimos desviar dos obstáculo, como ilustra a Figura 9

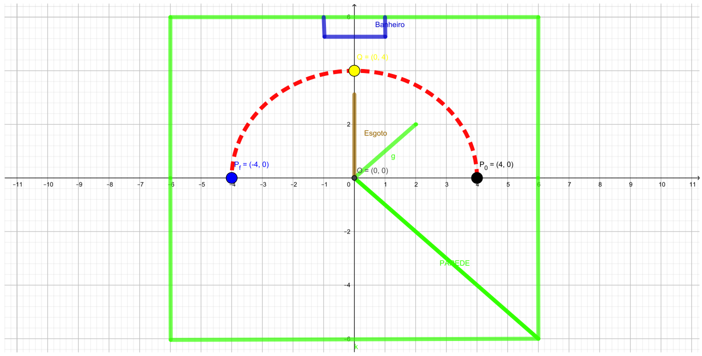


Figura 9: A figura tracejada representa a trajetória descrita pelo robô .

Portanto, a trajetória escolhida para o deslocamento do robô da posição inicial $\mathrm{P}_0$ até a posição final $\mathrm{P}_\mathrm{f}$ é dada através do produto de matrizes pela equação (11), como ilustra a Figura 9.

## 4. Conclusão

Este trabalho apresentou uma maneira de construir uma circunferência de centro na origem, através do produto de matrizes. Mais precisamente, fixando um ponto no plano e em seguida fazendo o produto de matrizes ortogonais por esse ponto, conseguimos sempre obter uma circunferência, onde as matrizes utilizadas no processo são dadas de modo claro pelas Proposições (2)-(3). O que nos fascina é o fato de um produto por matrizes ortogonais influenciar diretamente a geometria do objeto em estudo.

Essa maneira de ver a circunferência permite-nos estudar a trajetória entre dois pontos de uma circunferência de centro na origem, utilizando apenas o produto de matrizes. Como consequência, conseguimos descrever a trajetória descrita por um robô ao longo de um plano, na presença de obstáculos.

Toda teoria apresentada pode ser trabalhada com alunos de 2º ano do ensino médio, sendo uma rica fonte de bons exemplos e aplicações, para os professores utilizarem como parte interdisciplinar no processo de formação básica em matemática.

Uma das dificuldades encontradas ao estudar apenas as circunferências de centro na origem é que ficamos limitados a trajetórias descritas em torno da origem. Para resolver esse problema e obter várias outras possibilidades de escolha de trajetórias, temos que estudar uma circunferência de centro em um ponto qualquer. Isso fica para um trabalho futuro.

## Referências

[1] Adorno, B. V. e Borges, G. A. (2006). Um Método de Planejamento de Trajetória para Robôs Móveis Através de Passeios Aleatórios Adaptativos e Mapa de Rotas,*Annais do Congresso Brasileiro de Automática*, pp.3188-3193.

[2] Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática*. São Paulo, 3th edition.

[3] Cayley, A. (1858). *A memoir on the theory of matries*. Philosophical Transction of The Royal Society of London, 148: 17-37.

[4] de Lima Ottoni, G. e Lages, W. F. (2005). Navegação de Robôs Móveis em Ambientes Desconhecidos Usando Sonares e Ultra-Som,*Revista Controle e Automação*. 14(4), 402-411.

[5] Iezzi, G., Osvaldo Dolce, D. D, Périgo, R., and Almeida, N.(2016). *Matemática - Ciências e Aplicações*, Volume 2. Saraiva, 9ª edição.

[6] Polia, G.(1995). *A Arte de Resolver Problemas*, Interciências.

[7] Tavares Neto, R.F. e dos Santos Coelho, L. (2005). Planejamento de Rotas para Robôs de Inspeção Usando um Algoritmo Híbrido de Colônia de Formigas e Algoritmo Cultural, Anais do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente.

Marina França Oliveira
Secretaria de Educação do Estado do Maranhão-Seduc/MA
<marinnafoliveira@gmail.com>

Cleidinaldo Aguiar Souza
Universidade Federal do Piauí-UFPI
<aguiarnaldo@ufpi.edu.br>

Recebido: 24/07/2020
Publicado: 23/10/2020