PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1016

Um erro interessante ou sequências log-côncavas e o triângulo de Pascal

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Resumo

Neste artigo fazemos um relato de como um erro no enunciado de um exercício levou-nos muito mais longe do que o acerto teria levado. Na tentativa de explicar aos alunos por que o exercício, tal com estava proposto, não teria solução, fomos levados a explorar um aspecto que normalmente não é focado quando se estuda o triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais, que é o da log-concavidade das linhas do triângulo de Pascal. Este conceito, normalmente não explorado, proporcionou um entendimento mais aprofundo da impossibilidade no problema, muito além de meramente trancar nos cálculos. Os alunos estão familiarizados com os conceitos de convexidade e concavidade de funções. Essa foi uma oportunidade de familiarizá-los com esses mesmos conceitos no contexto de sequências.

Palavras-chave: triângulo de Pascal, coeficientes binomiais, sequências log-côncavas.

Abstract

In this article we report on how an error in the statement of an exercise took us much further than the correct statement would have taken us. In an attempt to explain the students why the exercise, as it was proposed, would not have a solution, we were led to explore an aspect usually not focused when studying Pascal's triangle and binomial coefficients, which is the log-concavity of Pascal's triangle rows. This concept, normally unexplored, provided a deeper understanding of the nonexistence of solution to the problem, far beyond merely getting stuck in the calculations. Students are familiar with the concepts of convexity and concavity of functions. This was an opportunity to familiarize them with the same concepts in the context of sequences.

Keywords: Pascal's triangle; binomial coefficients; log-concave sequences.

1. Introdução

Tudo começou quando propuz aos alunos da disciplina de Tópicos de Aritmética, do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, entregar, entre outros, um exercício que pedia para encontrar três coeficientes binomiais consecutivos de uma mesma linha do triângulo de Pascal, ou seja, da forma $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$, que estivessem na proporção $6 : 11 : 45$. Perguntava ainda se esses eram os únicos possíveis. Vamos ver que esse enunciado continha um erro de digitação. A análise desse erro junto com os alunos deu origem a considerações bastante

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

interessantes, que serão expostas a seguir, motivando inclusive o estudo de um conceito novo para os alunos.

A disciplina está sendo desenvolvida na forma de Ensino Remoto Emergencial e os alunos estão sendo avaliados através de listas de exercícios mais ou menos semanais. O exercício em questão, junto com outros dois, fazia parte da atividade de recuperação de três alunos, o que exigiu que a atividade fosse avaliada de maneira a não prejudicar os alunos.

2. Tentativa de resolução do exercício

Para início de conversa, vamos ver o que aconteceria se tentássemos resolver a questão. Queremos

$$\frac{\binom{n}{k}}{6} = \frac{\binom{n}{k+1}}{11} = \frac{\binom{n}{k+2}}{45},$$

ou seja,

$$\frac{n!}{6k!(n-k)!} = \frac{n!}{11(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{45(k+2)!(n-k-2)!}.$$

Dividindo por $n!$ e multiplicando por $k!(n-k-2)!$, obtemos

$$\frac{1}{6(n-k)(n-k-1)} = \frac{1}{11(k+1)(n-k-1)} = \frac{1}{45(k+2)(k+1)}.$$

Invertendo as frações, ficamos então com

$$6(n-k)(n-k-1) = 11(k+1)(n-k-1) = 45(k+2)(k+1).$$

Da igualdade $6(n-k)(n-k-1) = 11(k+1)(n-k-1)$, segue que $6(n-k) = 11(k+1)$, isto é, $6n = 17k + 11$.

Da igualdade $11(k+1)(n-k-1) = 45(k+2)(k+1)$, segue que $11(n-k-1) = 45(k+2)$, isto é, $11n = 56k + 101$.

Portanto as condições dadas no enunciado equivalem a

$$\begin{cases} 6n = 17k + 11 \\ 11n = 56k + 101 \end{cases}$$

que é um sistema linear de duas equações com duas variáveis. Da primeira equação segue que

$$n = \frac{17k + 11}{6}$$

e, da segunda equação, segue que

$$n = \frac{56k + 101}{11}.$$

Portanto devemos ter

$$\frac{17k + 11}{6} = \frac{56k + 101}{11},$$

ou seja, $11 \cdot 17k + 11^2 = 6 \cdot 56k + 6 \cdot 101$, isto é, $187k + 121 = 336k + 606$. Então $149k + 485 = 0$, o que nos dá

$$k = -\frac{485}{149}.$$

Só que devido à natureza do problema, buscamos soluções n e k no conjunto dos números naturais e ainda satisfazendo $k + 2 \leq n$, já que o coeficiente binomial $\binom{n}{k+2}$ foi considerado. O valor de k encontrado é negativo e não é inteiro. Portanto, tal como está formulado, o problema não tem solução.

É interessante notar que os alunos encontraram na linha 12 do triângulo de Pascal os números

$$\binom{12}{2} = 66 = 6 \cdot 11, \qquad \binom{12}{3} = 220 = 20 \cdot 11, \qquad \binom{12}{4} = 495 = 45 \cdot 11,$$

só que esses três números estão na proporção $6 : 20 : 45$, e não $6 : 11 : 45$. Portanto uma maneira de consertar o enunciado, de modo a que passasse a ter solução, e até mesmo solução única, seria trocar a proporção para $6 : 20 : 45$. Mas, como veremos na próxima seção, podemos fazer muito mais do que isso.

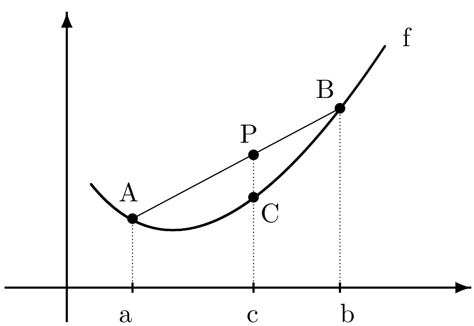
3. Sequências côncavas e log-côncavas

A seguir vamos relembrar os conceitos de função convexa e de função côncava. Sejam $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ dois pontos do gráfico de uma função f definida em um intervalo I. A corda que passa por A e B é o segmento de reta ligando A com B. Dizemos que f é uma *função convexa* se a corda que passa por dois pontos quaisquer de seu gráfico está acima do gráfico (mais precisamente, a corda não contém ponto algum abaixo do gráfico da função). Na figura a seguir, para qualquer $c \in (a, b)$, o ponto $C = (c, f(c))$ está abaixo do ponto P. Dados $a < c < b$ em I, chamando de $\lambda = \dfrac{c-a}{b-a}$, temos

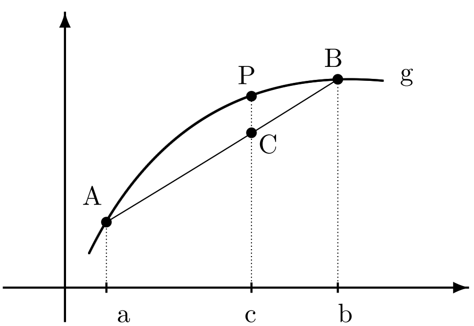
$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad c = a + (c - a) = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b.$$

Os pontos C e D da figura têm coordenadas

$$C = \big((1-\lambda)a + \lambda b,\ f((1-\lambda)a + \lambda b)\big) \quad \text{e} \quad P = \big((1-\lambda)a + \lambda\ b,\ (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$



Função convexa



Função côncava

A função f é convexa quando o ponto P está sempre acima de C. Isso se expressa como

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in (0,1), \quad \text{tem-se} \quad f((1-\lambda)a + \lambda b)) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \tag{1}$$

motivando a seguinte definição.

Definição 1. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ é uma *função convexa* se valer a condição (1).

Exemplo 1. São convexas as funções $f_1(x) = e^{kx}$ e $f_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, se $A > 0$.

Uma figura $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ é convexa quando para quaisquer dois pontos A e B de $\mathcal{A}$, o segmento de reta que une A e B está contido em $\mathcal{A}$. A função f é convexa se e somente se o seu epigráfico, isto é, o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x \in I\ ,\ y \geq f(x)\}$$

que está acima de seu gráfico, for convexo. Esta é a justificativa para o nome função convexa.

Invertendo o sentido da desigualdade, temos a seguinte definição.

Definição 2. Dizemos que $g : I \to \mathbb{R}$ é uma *função côncava* se

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \qquad \text{tem-se} \quad g((1-\lambda)a + \lambda b)) \leq (1-\lambda)g(a) + \lambda g(b). \tag{2}$$

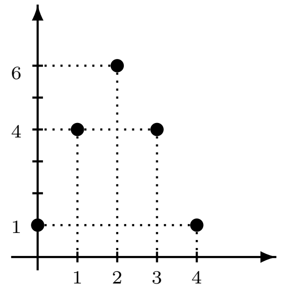
Geometricamente, g é uma função côncava se a corda que une dois pontos quaisquer de seu gráfico está abaixo do gráfico.

Exemplo 2. São côncavas as funções $g_1(x) = \log x$ e $g_2(x) = \sqrt{x}$ definidas no intervalo $I = (0, +\infty)$. Existem funções que não são convexas nem côncavas, por exemplo a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$.

Agora vamos relacionar os conceitos de convexidade e de concavidade de funções com correspondentes conceitos para sequências. Começamos com um exemplo, considerando a linha 4 do triângulo de Pascal, formada pelos números

$$a_0 = \binom{4}{0} = 1, \quad a_1 = \binom{4}{1} = 4, \quad a_2 = \binom{4}{2} = 6, \quad a_3 = \binom{4}{3} = 4, \quad a_4 = \binom{4}{4} = 1.$$

Vamos fazer um gráfico da função $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \longmapsto a_k$. O gráfico é formado por um conjunto finito de pontos, $C = \{(0, 1), (1, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1)\}$, pois a função leva $0 \longmapsto 1,\ 1 \longmapsto 4,\ 2 \longmapsto 6$, etc.



Se, em vez de um número finito de pontos, tivéssemos uma linha contínua ligando esses pontos (poderia ser mesmo uma linha poligonal formada por segmentos de reta ligando cada um desses pontos a seus dois vizinhos, da esquerda e da direita), a figura sugere que teríamos um função côncava. Esse raciocínio sugere que consideremos o conceito de sequência côncava. O importante é que cada ponto do conjunto C (exceto as duas extremidades) está acima do segmento de reta que une os seus dois vizinhos.

Assim, no gráfico acima, o ponto $(1,4)$ está acima do segmento de reta que une os pontos $(0,1)$ e $(2,6)$. Do mesmo modo, o ponto $(2,6)$ está acima do segmento de reta que une os pontos $(1,4)$ e $(3,4)$, e o ponto $(3,4)$ está acima do segmento de reta que une os pontos $(2,6)$ e $(4,1)$.

Pergunta: Como podemos tornar preciso esse conceito? Muito simples, a condição é que a ordenada de cada ponto seja maior ou igual à média aritmética das ordenadas dos dois pontos vizinhos mais próximos, à esquerda e à direita. No exemplo acima, temos de fato

$$4 \geq \frac{1+6}{2}\,, \qquad 6 \geq \frac{4+4}{2}\,, \qquad 4 \geq \frac{6+1}{2}.$$

Agora podemos dar a definição formal.

Definição 3. Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números reais é chamada de *sequência côncava* se

$$a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \qquad \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Dizemos que a sequência é *convexa* se valer a desigualdade com o sentido invertido.

Conceitos relacionados são os de sequência log-côncava (por extenso, logaritmicamente côncava) e de sequência log-convexa.

Definição 4. Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números reais não negativos é chamada de *sequência log-côncava* se

$$a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1}, \qquad \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Dizemos que a sequência é *log-convexa* se valer a desigualdade com o sentido invertido.

A razão para os nomes é que não é difícil mostrar que a sequência dos a_k é log-côncava se e somente se a sequência dos $\log a_k$ for côncava. Vale o mesmo para log-convexa. Mas isto não será importante aqui. Mais detalhes sobre sequências log-côncavas podem ser vistos em [3] e [6].

Teorema 1. *Toda sequência côncava é log-côncava.*

Observação 1. Para sequências convexas a propriedade análoga a essa não vale, o que vale é justamente a recíproca, toda sequência log-convexa é convexa. Mas não vamos nem enunciar tal fato como teorema para não desviar o foco da discussão.

O Teorema 1 diz-nos que a propriedade de ser log-côncava é mais fraca do que a propriedade de ser côncava. O conjunto das sequências log-côncavas contém o conjunto das sequências côncavas. Mas existem sequências log-côncavas que não são côncavas. Vamos ver um exemplo no mais adiante.

A seguir, vamos recordar a desigualdade entre média aritmética e média geométrica, que será usada da demonstração do Teorema 1. Dados dois números a e b, a média aritmética e a média geométrica de a e b são definidas como sendo os números m_a e m_g dados por

$$m_a = \frac{a+b}{2} \qquad \text{e} \qquad m_g = \sqrt{ab}.$$

Define-se média geométrica somente no caso $a \geq 0$ e $b \geq 0$, para evitar raiz quadrada de número negativo.

Teorema 2 (Desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica)**.** *Se* a *e* b *forem números reais não negativos, então*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Demonstração do Teorema 2. Sejam $a, b \geq 0$ números reais. Então suas raízes quadradas estão bem definidas. Todo quadrado é não negativo. Portanto

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Expandindo, temos

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Logo

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Dividindo por 2, segue a conclusão. □

Demonstração do Teorema 1. Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma sequência côncava de números reais não negativos. Vamos mostrar que a sequência é log-côncava. Seja $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Utilizando o Teorema 2 (desigualdade entre média aritmética e média geométrica), temos

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \geq \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}.$$

Mas pela definição de sequência côncava, temos que

$$a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Logo

$$a_k \geq \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

e, elevando ao quadrado,

$$a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1},$$

ou seja, a sequência dos a_k é log-côncava. □

Proposição 1. *Cada uma das linhas do triângulo de Pascal é uma sequência log-côncava, ou seja*

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1}, \qquad \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Demonstração. Basta notarmos que

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}^2 \frac{n+1}{(n-k+1)(k+1)} > 0.$$

□

Exemplo 3. Consideremos a sequência (s_n), onde para cada $n \geq 0$, s_n indica o produto de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal,

$$s_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{(1! \cdot 2! \cdots n!)^2}.$$

Os primeiros termos dessa sequência são $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 9$, $s_4 = 96$, $s_5 = 2500$, $s_6 = 162000$, ... e ela é a sequência A001142 da Online Encyclopedia of Integer Sequences [5]. Temos

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{[(n+1)!]^{n+2}}{(n!)^{n+1}\,[(n+1)!]^2} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Portanto

$$\frac{s_{n+1} \cdot s_{n-1}}{s_n^2} = \frac{s_{n+1}/s_n}{s_n/s_{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A igualdade acima implica que $s_{n+1} \cdot s_{n-1} > s_n^2$, o que nos diz que a sequência (s_n) é log-convexa.

É muito curioso que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1} \cdot s_{n-1}}{s_n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tal exemplo é devido a Harlan J. Brothers [1] e mostra que o número e pode ser obtido a partir do triângulo de Pascal.

Que o número π pode ser obtido a partir do triângulo de Pascal, já era conhecido há mais tempo. Daniel Hardisky, um engenheiro aposentado norte-americano muito envolvido com problemas em Matemática elementar, descobriu a seguinte maneira com que π aparece no triângulo de Pascal, ver [2],

$$\pi = 3 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\binom{4}{3}} - \frac{1}{\binom{6}{3}} + \frac{1}{\binom{8}{3}} - \cdots\right].$$

É claro que, como já era conhecido por Euler,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

o que nos dá um exemplo um tanto artificial de π no triângulo de Pascal, já que os denominadores $2n+1$ são iguais a $\binom{2n+1}{1}$.

4. Aplicação

Não existem coeficientes binomiais de uma mesma linha

$$\binom{n}{k}, \qquad \binom{n}{k+1}, \qquad \binom{n}{k+2}$$

com a razão de proporcionalidade 6 : 11 : 45. De fato, se isso acontecesse, teríamos

$$\binom{n}{k+1} = \frac{11}{6}\binom{n}{k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{k+2} = \frac{45}{6}\binom{n}{k}.$$

Em consequência, teríamos

$$\binom{n}{k+1}^2 - \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+2} = \binom{n}{k}^2 \left[\frac{11^2}{6^2} - \frac{45}{6} \right] = \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{11^2 - 45 \cdot 6}{6^2} < 0,$$

pois $11^2 - 45 \cdot 6 = 121 - 270 < 0$, o que é uma contradição, pois pela Proposição 1 acima cada linha do triângulo de Pascal é log-côncava, e assim $\binom{n}{k+1}^2 \geq \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+2}$.

O raciocínio acima pode ser usado para mostrar que para que existam três coeficientes binomiais consecutivos numa mesma linha do triângulo de Pascal na razão $\alpha : \beta : \gamma$, é necessário que $\beta^2 - \alpha\gamma \geq 0$.

Já tínhamos mostrado acima que não existem coeficientes binomiais nessa razão de proporcionalidade mas, usando a log-concavidade, obtivemos uma justificativa envolvendo muito menos contas e proporcionado um entendimento mais aprofundado da questão.

Exemplo 4. Passemos agora ao exemplo prometido acima, que mostra que nem toda sequência log-côncava é côncava. Consideremos a linha 5 do triângulo de Pascal

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{5} = 1.$$

Tal sequência, como qualquer linha do triângulo de Pascal, é log-côncava. No entanto ela não é uma sequência côncava, pois

$$5 < \frac{1+10}{2}.$$

Exemplo 5. Observamos que as colunas do triângulo de Pascal também são sequências log-côncavas. De fato, para k fixo, pondo

$$a_n = \binom{n}{k}$$

é imediato calcular

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} &= \binom{n}{k}^2 - \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k} = \frac{k}{n(n-k+1)} \binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{n(n-1)^2 \cdots (n-k+2)^2 (n-k+1)}{k!(k-1)!} \geq 0. \end{aligned}$$

O problema 11985, proposto por Donald Knuth em 2017 no American Mathematical Monthly [4], generaliza este exemplo. Para $s, t \in \mathbb{N}$, com $s \leq t$, seja

$$x_n = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1} + \cdots + \binom{n}{t}.$$

O problema propõe provar que a sequência (x_n) é log-côncava, isto é, $x_n^2 \geq x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Em nosso exemplo, consideramos o caso particular $s = t$.

5. Questões de existência e unicidade

Pergunta 1: Quais são as condições para que existam três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal com a proporção $a : b : c$?

Queremos encontrar n e k inteiros com $0 \le k \le n-2$ e tais que

$$\frac{\binom{n}{k}}{a} = \frac{\binom{n}{k+1}}{b} = \frac{\binom{n}{k+2}}{c} \tag{3}$$

A condição (3) é equivalente a

$$ak!(n-k)! = b(k+1)!(n-k-1)! = c(k+2)!(n-k-2)!,$$

ou seja,

$$a(n-k)(n-k-1) = b(k+1)(n-k-1) = c(k+2)(k+1).$$

Isto equivale a duas equações

$$\begin{cases} a(n-k) = b(k+1) \\ b(n-k-1) = c(k+2) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} an = (a+b)k + b \\ bn = (b+c)k + (b+2c) \end{cases} \tag{4}$$

Multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a, para eliminar n, obtemos

$$(ab+b^2)k + b^2 = (ab+ac)k + ab + 2ac,$$

isto é

$$(b^2-ac)k = ab + 2ac - b^2$$

Vamos sempre supor que a condição de log-concavidade $b^2 - ac > 0$ seja satisfeita. Segue que

$$k = \frac{ab+2ac-b^2}{b^2-ac} = \frac{a(b+c)}{b^2-ac} - 1. \tag{5}$$

Substituindo esse valor de k na primeira igualdade de (4), encontramos

$$n = \frac{(a+b)(b+c)}{b^2-ac} - 1. \tag{6}$$

Esse argumento prova a unicidade da solução. Não prova a existência, pois, para isso, teríamos que ter n e k inteiros com $0 \le k \le n-2$.

Notação: Seja $\Delta = b^2 - ac$.

Segue que uma condição necessária para existam n e k satisfazendo (3) é que

$$\Delta \mid a(b+c) \qquad \text{e} \qquad \Delta \mid (a+b)(b+c).$$

Subtraindo $a(b+c)$ de $(a+b)(b+c)$, obtemos a condição mais simétrica

$$\Delta \mid a(b+c) \qquad \text{e} \qquad \Delta \mid b(b+c).$$

Essa condição é também suficiente, como mostra o próximo resultado.

Proposição 2. *Dados inteiros positivos* a, b *e* c *satisfazendo a condição de log-concavidade*

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condicão necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ *é que*

$$\Delta \mid a(b+c) \qquad e \qquad \Delta \mid b(b+c). \tag{7}$$

Além disso, se existirem, esses três elementos são únicos.

Demonstração. Vimos acima que a condição (7) é necessária. Falta mostrar que também é suficiente. Dados inteiros positivos a, b e c satisfazendo $\Delta > 0$ e a condição (7), definimos n e k por (5) e (6). A condição (7) implica que n e k são inteiros não negativos. Note que

$$n - k = \frac{b(b+c)}{\Delta},$$

o que implica que $n - k \geq 1$. Na verdade,

$$n \geq k + 2,$$

pois, se $n - k = 1$, teríamos $b^2 + bc = b^2 - ac$, logo $c(a+b) = 1$, o que é uma contradição, pois $a \geq 1$ e $b \geq 2$. Portanto

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{b(b+c)}{a(b+c)} = \frac{b}{a}.$$

Analogamente, temos

$$\frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n-k-1}{k+2} = \frac{b(b+c) - b^2 + ac}{a(b+c) + b^2 - ac} = \frac{c(a+b)}{b(a+b)} = \frac{c}{b}.$$

Logo os três elementos $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$ estão na proporção $a : b : c$. □

Pergunta 2: Quais são as condições para que existam três elementos consecutivos em uma coluna do triângulo de Pascal com a proporção $a : b : c$?

Queremos encontrar n e k inteiros com $0 \leq k \leq n$ e tais que

$$\frac{\binom{n}{k}}{a} = \frac{\binom{n+1}{k}}{b} = \frac{\binom{n+2}{k}}{c} \tag{8}$$

Por um raciocínio semelhante ao que foi feito acima para responder a Pergunta 1, concluímos que n e k, se existirem, serão dados por

$$n = \frac{bc + ac - 2b^2}{\Delta} = \frac{b(c-b)}{\Delta} - 1 \qquad e \qquad k = \frac{bc - b^2 - ac + ab}{\Delta}. \tag{9}$$

Novamente, isso prova a unicidade de solução. Prova também que uma condição necessária para a existência da solução é que

$$\Delta \mid b(c-b), \qquad \Delta \mid (bc + ac - 2b^2) \qquad e\ \Delta \mid (bc - b^2 - ac + ab). \tag{10}$$

Mas, por subtração, obtemos

$$(bc + ac - 2b^2) - (bc - b^2 - ac + ab) = (ac - b^2) + a(c - b) = a(c - b) - \Delta.$$

Portanto, de (10), segue que $\Delta \mid a(c-b)$. Obtemos assim uma condição necessária mais simétrica, $\Delta \mid a(c-b)$ e $\Delta \mid b(c-b)$. Por um raciocínio análogo ao empregado para responder a Pergunta 1, mostra-se que essa condição é também suficiente.

Proposição 3. *Dados inteiros positivos* a, b *e* c *satisfazendo a condição de log-concavidade*

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condicão necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ *é que*

$$\Delta \mid a(c-b) \qquad e \qquad \Delta \mid b(c-b). \tag{11}$$

Além disso, se existirem, esses três elementos são únicos.

Exemplo 6. Vimos que existem três elementos consecutivos em uma linha do triângulo de Pascal com a proporção $6 : 20 : 45$. Aplicando a Proposição 3 acima, podemos ver que em uma coluna não existe. De fato, para $a = 6$, $b = 20$ e $c = 45$, temos

$$\Delta = 130, \qquad a(c-b) = 150 \qquad \text{e} \qquad b(c-b) = 1125.$$

Portanto Δ não divide $a(c-b)$ nem $b(c-b)$.

Pergunta 3. Será que isto que ocorreu no exemplo acima é a regra geral ou é possível encontrar três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal com uma mesma proporção $a : b : c$? Em outras palavras, o que ocorreu no exemplo acima foi um acidente ou é um fato geral?

Vamos ver que é possível encontrar sim. Para encontrar um tal exemplo, basta utilizar as condições (7) e (11), como afirma a próxima proposição.

Proposição 4. *Dados inteiros positivos* a, b *e* c *satisfazendo a condição de log-concavidade*

$$\Delta := b^2 - ac > 0,$$

uma condicão necessária e suficiente para que existam três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção $a : b : c$ *é que*

$$\Delta \mid a(b+c), \quad \Delta \mid a(c-b), \qquad \Delta \mid b(b+c) \quad e \quad \Delta \mid b(c-b).$$

Corolário 1. *Dados três inteiros positivos* a, b *e* c *satisfazendo a condição* $\Delta = b^2 - ac = 1$, *sempre existem três elementos consecutivos em uma linha e também em uma coluna do triângulo de Pascal na proporção* $a : b : c$.

Exemplo 7. Para a = 1, b = 2 e c = 3, temos $\Delta = 1$. As expressões (9) dizem-nos que os três elementos

$$\binom{1}{1} = 1, \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \text{e} \qquad \binom{3}{1} = 3$$

consecutivos na coluna 1 do triângulo de Pascal estão na proporção 1 : 2 : 3.

Por (5) e (6), os três elementos

$$\binom{14}{4} = 1001, \qquad \binom{14}{5} = 2002 \qquad \text{e} \qquad \binom{14}{6} = 3003$$

consecutivos da linha 14 também estão na mesma proporção 1 : 2 : 3.

Exemplo 8. Para a = 3, b = 5 e c = 8, temos $\Delta = 5^2 - 3 \cdot 8 = 1$. As expressões (9), (5) e (6) permitem descobrir que os três elementos

$$\binom{14}{6} = 3003, \qquad \binom{15}{6} = 5005 \qquad \text{e} \qquad \binom{16}{6} = 8008$$

consecutivos na coluna 6 do triângulo de Pascal estão na proporção 3 : 5 : 8, e que o mesmo acontece com os elementos $\binom{103}{38}$, $\binom{103}{39}$ e $\binom{103}{40}$ da linha 103. Usando um *software* obtemos que

$$\binom{103}{38} = 3\alpha, \qquad \binom{103}{39} = 5\alpha \qquad \text{e} \qquad \binom{103}{40} = 8\alpha,$$

onde $\alpha = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103$ e seu valor aproximado é $\alpha = 7{,}6522728443 \cdot 10^{27}$.

Exemplo 9. Finalmente, para desfazer uma possível impressão errônea de que só existem exemplos desse tipo para $\Delta = 1$, consideremos a = 2, b = 4 e c = 7. Temos que $\Delta = 2$ divide $a(c \pm b)$ e $b(c \pm b)$, satisfazendo as condições da Proposição 4. Na coluna 3 temos

$$\frac{\binom{5}{3}}{2} = \frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{\binom{7}{3}}{7} = 5$$

e na linha 32

$$\frac{\binom{32}{10}}{2} = \frac{\binom{32}{11}}{4} = \frac{\binom{32}{12}}{7} = 32.256.120.$$

6. Agradecimento

Agradeço ao/à parecerista, cujos comentários contribuíram para melhorar este artigo.

Referências

[1] Brothers, H. J. "Math Bite: Finding e in Pascal's Triangle". *Mathematics Magazine*, v. 85, p. 51-51, (2012).

[2] https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/PiInPascal.shtml

[3] Foldes, S.; Major, L. "Log-concavity of Rows of Pascal Type Triangles". *Utilitas Mathematica*, v. 116, p. 203-210, 2020.

[4] Knuth, D. "Problem 11985". *The American Mathematical Monthly*, v. 124, p. 563, 2017.

[5] Sloane, N. J. A. et al *Online Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/

[6] Stanley, R. P. "Log-concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry". *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 576, p. 500-535, 1989.

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<brietzke@mat.ufrgs.br>

Recebido: 08/03/2022
Publicado: 03/06/2022