PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.2, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1019

Discriminantes de polinômios com uma variável

Alberis L. de Souza[1] Wállace M. de Sousa

Resumo

O presente artigo consiste em verificar a natureza das raízes de polinômios de acordo com valores assumidos por seu discriminante, iniciando com casos particulares; representa o discriminante em função das raízes dos polinômios de 2° e 3° graus, especificamente; e, de maneira geral, relaciona o discriminante com raízes de polinômios de qualquer grau. Também relaciona o discrimiante em função dos coeficientes dos respectivos polinômios, fazendo uma conexão com matriz de Sylvester e resultantes polinomiais.

Palavras-chave: Discriminante; Matriz de Sylvester; Polinômio; Resultante;.

Abstract

The present article consists in verifying the nature of the roots of polynomials according to values assumed by their discriminant, starting with particular cases. The discriminant is represented as a function of the roots of 2nd and 3rd degree polynomials, specifically, and in general, the discriminant is related to the roots of degree polynomials of any degree. The discriminant is also related as a function of the polynomial coefficients, making a connection with the Sylvester Matrix and resultant of a polynomial and as well.

Keywords: Discriminant; Sylvester Matrix; Polynomial; Resultant.

1. Introdução

Os primeiros indícios do uso de equações estavam em dois valiosos papiros: Papiro Egípcio de Ahmes ou de Rhind, escrito certa de 1650 a.C., e Papiro de Moscou, escrito cerca de 1850 a.C. [7]. O Papiro de Rhind foi copiado pelo escriba egípcio Ahmes e comprado em 1858, na cidade de Luxor, pelo arqueólogo, advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind. Menciona que os registros provêm de um protótipo do Reino do Meio, cerca de 2000 a 1800 a.C.. Rhind morreu em 1863, seu papiro foi adquirido pelo British Museum, Museu Britânico de Londres. Além de equações lineares, nele há problemas matemáticos envolvendo aritmética, frações e trigonometria [3]. O Papiro de Moscou, é também chamado de Papiro de Golenischev em homenagem ao colecionador russo Abraão V. S. Golenischev, que o comprou no Egito em 1893. Em 1917, pertenceu ao Museu de Belas-Artes de Moscou, daí passou a ser conhecido como Papiro de Moscou. Até hoje é desconhecido o escriba que o escreveu. Possui 25 problemas matemáticos envolvendo áreas, volume, medições, equações e outros [3], [6].

[1]Parcialmente apoiado pela Capes

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Os Babilônios, no mesmo período, desenvolveram mais, pois já trabalhavam com equações de 2° grau e resolviam-nas por um método utilizado pelos hindus quase 3 milênios depois, o chamado "completamento do quadrado". Os problemas algébricos eram colocados e solucionados em um mesmo enunciado, com representações um tanto abstratas, utilizando comprimento, largura ou lado de um quadrado e áreas retangulares [7]. Uma Plaqueta de Argila Babilônica, escrita cerca de 2000 e 1600 a.C., foi descoberta no sul da Mesopotâmia e encontra-se no Museu Britânico sob a denominação BM13901; contém 24 problemas algébricos, incluindo as formas simples de equações de segundo grau [8].

Na Universidade de Alexandria, por volta de 300 a.C., surgiu o talentoso gênio da Matemática, Euclides. Ele formou alguns conceitos que se tornaram extremamente importantes na solução de equações, como, por exemplo, as expressões abaixo, que são conhecidas como "noções comuns" de Euclides:

- Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
- Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais;
- Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

Nos primeiros séculos depois de Cristo, apareceram grandes matemáticos, dentre eles o famoso astrônomo Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa Al-Khwarizmi (783-850), conhecido como o pai da álgebra, foi considerado o melhor matemático de sua época. Nascido na província persa de Khwarezm, onde é atualmente o Uzbequistão, escreveu o livro em árabe com o título *Al-Kitab Al-jabr Wa'l Muqabalah*, trazendo discussões de equações lineares e quadráticas [7].

Na Índia, na cidade de Vijayapura, nasceu o mais importante matemático do século XII e astrônomo Bhaskara Akaria, aproximadamente (1114-1185) [3]. A fórmula que recebeu seu nome, ele mesmo relatou ter sido encontrada pelo matemático hindu Sridhara (870-930), um século antes. Bhaskara escreveu *Bijaganita*, um livro de Álgebra, onde se dedicou às resoluções de equações lineares e quadráticas, utilizando métodos já apresentados por outros matemáticos [12].

No ano de 1175, nasceu em Pisa, Itália, o matemático Leonardo Fibonacci, conhecido como Leonardo de Pisa. Em 1202 publicou o livro *Liber Abaci.* Os quinze capítulos da obra explicam métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, cujas raízes negativas e imaginárias não são admitidas. Depois de Fibonacci, surgiu o grande matemático italiano Luca Paciolo, também conhecido como Pacioli. Sua primeira obra foi *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* publicada em 1494 em Veneza, onde introduziu alguns símbolos, simplificando os de Fibonacci, como, por exemplo, o desconhecido (a incógnita) que foi chamado de *cosa* [7].

O matemático francês François Viète (1540-1603) determinou um método para encontrar a solução de equações quadráticas utilizando uma mudança de variável. Da equação

$$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0, \tag{1}$$

após a aplicação do método de substituição de variável, encontra-se a expressão [1]

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}.$$

Essa é a fórmula que atualmente no Brasil é conhecida por *Fórmula de Bhaskara*, onde o termo

$$\Delta := b^2 - 4ac \tag{2}$$

é conhecido como o *discriminante* do polinômio $ax^2 + bx + c$ [12].

No caso de equações cúbicas, o primeiro registro aconteceu com a antiga civilização babilônica, por volta de 1800 a 1600 a.C.. Foram encontradas tabelas de cubos e de raízes cúbicas. No período grego, os volumes de sólidos geométricos levavam a problemas que, nos tempos modernos, envolvem equações cúbicas. Por exemplo, a duplicação do cubo consiste em resolver a equação $x^3 = 2$.

O matemático árabe Umar Al-Khayammi (1050-1123) solucionou equações cúbicas usando abordagem geométrica, não conseguindo encontrar soluções aritméticas, que, por sinal, acreditava serem impossíveis de existir. Omar Khayyam generalizou o método de resolução de todas as equações de 3° grau (que tinham raízes positivas) usando cônicas [3].

Há registros de que o matemático Scipione del Ferro (1465-1526) foi o primeiro que descobriu as resoluções das equações cúbicas. Não se sabe como ou quando fez essa descoberta, pois nunca publicou obra alguma. Antes de sua morte, revelou a solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" ($x^3 + px = q$) e "cubo igual a coisas e número" ($x^3 = px + q$) a seus discípulos Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore. Em 1535, Fiore propõe desafiar para uma disputa matemática o talentoso matemático de nacionalidade italiana, Nicolo Fontana. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo equaçõs cúbicas, e Tartaglia também preparou seus problemas. Iniciada a disputa, Tartaglia, inteligentemente, conseguiu resolver todas as 30 questões propostas por Fiore e ainda foi mais além: achou a fórmula geral para as equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3}$$

vencendo assim a competição. A notícia da disputa entre Tartaglia e Fiore chegou até Milão, onde vivia o matemático Girolamo Cardamo, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576. Mediante tantas pressões e confiando em juramentos feitos por Cardano, Tartaglia revela a Cardano as cobiçadas fórmulas para resolução das equações cúbicas. Em 1545, quebrou seu juramento feito a Tartaglia, publicando o maior artigo algébrico existente, a *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, também conhecida como *Ars Magna*, foi publicada em Nurenberg, na Alemanha.

Como as soluções encontradas foram para as equações cúbicas (3), então não podia ser aplicadas diretamente numa equação de terceiro grau geral. Mas qualquer equação de terceiro grau pode ser transformada em uma equação do tipo (3), e a *Fórmula de Cardano*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4}$$

garante-nos pelo menos uma raiz [11]. Agora, basta usar o algoritmo da divisão para polinômios e encontrar as outras raízes.

Na seção 2 estudamos a relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante de polinômios de 2° grau e de 3° grau da forma x^3+px+q. Na seção 3 generalizamos a definição de discriminante para polinômios de graus arbitrários de duas maneiras equivalentes. Na primeira, escrevemos esse determinante em função de uma resultante, enquanto que na segunda, apresentamos o determinante em função de suas raízes.

2. Discriminante de polinômios de 2° grau e de 3° grau da forma $x^3 + px + q$

O discriminante de um polinômio, muitas vezes denotado pelo símbolo Δ, dá algumas dicas importantes sobre a natureza das raízes do polinômio.

2.1. Relação do discriminante com as raízes de um polinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Proposição 1. *Considere o polinômio* $ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$. *Se* x_1, x_2 *são as raízes desse polinômio, então o discriminante da Equação* (2) *satisfaz a seguinte equação*

$$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2. \tag{5}$$

Demonstração. Pelas relações de Girard, temos que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Assim,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \implies (x_1 + x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} \implies x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} \implies x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - 4 \cdot \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2},$$

como gostaríamos. □

Observação 1. Considere a notação da Proposição 1. Notemos que:

- Se $\Delta > 0$, então $x_1 \neq x_2$. Pela Equação (2), temos que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- Se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2$, pois $a \neq 0$;
- Se $\Delta < 0$, então $x_1 \neq x_2$. Pela Equação (2), temos que $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Nesse caso, as raízes são conjugadas entre si e, portanto, $x_1 - x_2$ não é um número real.

2.2. Relação do discriminante com as raízes de um polinômio da forma $x^3 + px + q$

Considere os polinômios de 3° grau da forma $x^3 + px + q$, onde $p, q \in \mathbb{R}$ e destaquemos o radicando $q^2/4 + p^3/27$ da Fórmula de Cardano (4). Nesse caso, o discriminante Δ desse polinômio será definido por

$$\Delta := -108 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right). \tag{6}$$

Podemos dividir os polinômios da forma $x^3 + px + q$ em três tipos, com base na natureza de suas raízes:

I - Polinômios com três raízes reais distintas;

II - Polinômios com três raízes reais, sendo uma delas com multiplicidade pelo menos dois;

III - Polinômios com duas raízes complexas conjugadas entre si e uma raiz real.

Exemplo 1. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo I.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c), \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ distintos.} \tag{7}$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $c = -(a + b)$. Além disso, pela Equação (7) temos que

$$p = ab - (a + b)^2 \ \text{ e } \ q = ab(a + b). \tag{8}$$

Agora, substituindo as Equações (8) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{ab(a + b)}{2} \right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3} \right)^3 \right] = (a - b)^2 (2a + b)^2 (a + 2b)^2. \tag{9}$$

Sabendo que a, b e c são distintos, com $c = -(a + b)$, segue que $\Delta > 0$.

Exemplo 2. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo II.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - a)(x - b), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $b = -2a$. Além disso, pela Equação (10) temos que

$$p = -3a^2 \ \text{ e } \ q = -2a^3. \tag{11}$$

Agora, substituindo as Equações (11) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{-2a^3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3a^2}{3} \right)^3 \right] = 0. \tag{12}$$

Segue que $\Delta = 0$.

Exemplo 3. Calcule o sinal do discriminante de $x^3 + px + q$ do Tipo III.

Nesse caso,

$$x^3 + px + q = \big(x - [a + bi]\big)\big(x - [a - bi]\big)\big(x - c\big), \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0. \tag{13}$$

Analizando o termo de segundo grau da equação do segundo membro, concluímos que $c = -2a$. Além disso, pela Equação (13) temos que

$$p = b^2 - 3a^2 \ \text{ e } \ q = 2a(a^2 + b^2). \tag{14}$$

Agora, substituindo as Equações (14) na Equação (6), obtemos que

$$\Delta = -108 \cdot \left[\left(\frac{2a(a^2 + b^2)}{2} \right)^2 + \left(\frac{b^2 - 3a^2}{3} \right)^3 \right] = -4 \cdot \big(81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6\big). \tag{15}$$

Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, segue que $\Delta < 0$.

Observação 2. Notemos que a partir da definição de discriminante na Equação (6), podemos concluir resultados semelhantes aos obtidos na Observação 1:

- Se $\Delta > 0$, então o polinômio $x^3 + px + q$ é do Tipo I;
- Se $\Delta = 0$, então o polinômio $x^3 + px + q$ é do Tipo II;
- Se $\Delta < 0$, então o polinômio $x^3 + px + q$ é do Tipo III.

3. Discriminates de polinômios de grau arbitrário

Nesta seção estudaremos duas maneiras equivalentes de generalizar a definição do discriminante de polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de graus maiores do que 3.

3.1. Relação entre discriminante e resultante

Considere $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ dois polinômios de graus $\partial\big(f(x)\big) = n$ e $\partial\big(g(x)\big) = m$. Nesse caso, existem $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{R}$ com $a_n, b_m \neq 0$ tais que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ \text{ e } \ g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$

A *matriz de Sylvester* de $f(x)$ e $g(x)$ é a matriz quadrada (de ordem $m + n$)

$$\text{Syl}\ \big(f(x), g(x)\big) := \begin{bmatrix}
a_n & & & & b_m & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & b_{m-1} & b_m & & \\
a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & \\
\vdots & a_{n-2} & \ddots & a_n & \vdots & b_{m-2} & \ddots & b_m \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{m-1} \\
a_1 & \vdots & & a_{n-2} & b_1 & \vdots & & b_{m-2} \\
a_0 & a_1 & & \vdots & b_0 & b_1 & & \vdots \\
 & a_0 & \ddots & \vdots & & b_0 & \ddots & \vdots \\
 & & \ddots & a_1 & & & \ddots & b_1 \\
 & & & a_0 & & & & b_0
\end{bmatrix}$$

onde os espaços vazios são ocupados por zeros, as primeiras m colunas são preenchidas pelos coeficientes de $f(x)$ e as últimas n colunas são preenchidas com os coeficientes de $g(x)$.

Definição 1. Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. A resultante de $f(x)$ e $g(x)$ é definida por

$$\text{Res}\ \big(f(x), g(x)\big) := \det\Big(\text{Syl}\ \big(f(x), g(x)\big)\Big).$$

Definição 2. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, com $a_n \neq 0$. O discriminante de f é definido por

$$\Delta\big(f(x)\big) := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\text{Res}\ \big(f(x), f'(x)\big)}{a_n},$$

onde $f'(x) := na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \in \mathbb{R}[x]$.

Exemplo 4 (Discriminante de polinômio de 2° grau)**.** Calcule $\Delta(f(x))$, onde $f(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f'(x) = 2ax + b$. Segue que $\partial\big(f(x)\big) = 2$ e $\partial\big(f'(x)\big) = 1$. A matriz de Sylvester de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$\text{Syl}\ \big(f(x), f'(x)\big) = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Nesse caso,

$$\text{Res}\ \big(f(x), f'(x)\big) = \det\big(\text{Syl}\ \big(f(x), f'(x)\big)\big) = 4a^2c - ab^2.$$

Portanto,

$$\Delta\big(f(x)\big) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\text{Res}\ \big(f(x), f'(x)\big)}{a} = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}\left[4a^2c - ab^2\right]}{a} = b^2 - 4ac,$$

ou seja,

$$\Delta\big(f(x)\big) = b^2 - 4ac.$$

Exemplo 5 (Discriminante de polinômio de 3° grau)**.** Calcule $\Delta(f(x))$, onde $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Segue que $\partial\big(f(x)\big) = 3$ e $\partial\big(f'(x)\big) = 2$. A matriz de Sylvester de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$\text{Syl}\ \big(f(x), f'(x)\big) = \begin{bmatrix} a & 0 & 3a & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 3a & 0 \\ c & b & c & 2b & 3a \\ d & c & 0 & c & 2b \\ 0 & d & 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Usando a regra de Laplace temos que

$$\text{Res}\ \big(f(x), f'(x)\big) = \det\big(\text{Syl}\ \big(f(x), f'(x)\big)\big) = a(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(x)\big) &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\text{Res}\ \big(f(x), f'(x)\big)}{a} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}\left[a(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2)\right]}{a} \\ &= (-1)\cdot\big(27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2\big) \\ &= -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d + b^2c^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta\big(f(x)\big) = -27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d + b^2c^2.$$

Observação 3. Notemos que se $f(x) = x^3 + px + q$, então $\Delta(f(x)) = -27q^2 - 4p^3 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$, ou seja, recuperamos a fórmula do discriminante da Equação (6).

3.2. Relação entre discriminante e raízes de polinômios

Vamos apresentar uma outra maneira de calcular o discriminante de um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau arbitrário quando conhecemos as raízes.

Definição 3. Sejam $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, com $a_n \neq 0$ e

$$\Delta_0\big(f(x)\big) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2, \tag{16}$$

onde $x_1, ..., x_n$ são as raízes (em $\mathbb{C}$) de $f(x)$.

Exemplo 6. Mostre que $\Delta_0\big(f(x)\big) = \Delta\big(f(x)\big)$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ e $a \neq 0$.

Suponhamos que $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sejam as raízes de $f(x)$. Nesse caso,

$$\Delta_0\big(f(x)\big) = a^{2\cdot 2-2}(x_1 - x_2)^2 = a^2(x_1 - x_2)^2,$$

ou seja,

$$\Delta_0\big(f(x)\big) = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

Segue, pela Proposição 1, que $\Delta\big(f(x)\big) = \Delta_0\big(f(x)\big)$.

Exemplo 7. Mostre que $\Delta_0\big(f(x)\big) = \Delta\big(f(x)\big)$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo I.

Suponhamos que $x^3 + px + q = (x-a)(x-b)(x-c)$. Nesse caso, $c = -(a+b)$. Segue que

$$\Delta_0(f(x)) = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = (a-b)^2(a+a+b)^2(b+a+b)^2 = (a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2,$$

ou seja,

$$\Delta_0\big(f(x)\big) = (a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2.$$

Segue, pela Equação (9), que $\Delta\big(f(x)\big) = \Delta_0\big(f(x)\big)$.

Exemplo 8. Mostre que $\Delta_0\big(f(x)\big) = \Delta\big(f(x)\big)$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo II.

Suponhamos que $x^3 + px + q = (x-a)(x-a)(x-b)$. Nesse caso, $b = -2a$. Segue que

$$\Delta_0(f(x)) = (a-a)^2(a-b)^2(a-b)^2 = 0$$

Segue, pela Equação (12), que $\Delta\big(f(x)\big) = \Delta_0\big(f(x)\big)$.

Exemplo 9. Mostre que $\Delta_0\big(f(x)\big) = \Delta\big(f(x)\big)$, onde $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ é do Tipo III.

Suponhamos que $x^3 + px + q = \big(x - [a+bi]\big)\big(x - [a-bi]\big)\big(x-c\big)$. Nesse caso, $c = -2a$. Segue que

$$\begin{aligned}\Delta_0(f(x)) &= \big([a+bi] - [a-bi]\big)^2\big([a+bi] - c\big)^2\big([a-bi] - c\big)^2 = (2bi)^2(3a+bi)^2(3a-bi)^2 \\ &= (-4b^2)(9a^2+b^2)^2 = -4b^2(81a^4 + 18a^2b^2 + b^4),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_0(f(x)) = -4(81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6).$$

Segue, pela Equação (15), que $\Delta\big(f(x)\big) = \Delta_0\big(f(x)\big)$.

Observação 4. Os resultados verificados nos Exemplos 6, 7, 8 e 9 são, de fato, casos particulares do seguinte resultado mais geral.

Lema 1. *Seja* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *de grau* n $(n \geq 1)$. *Então*

$$\Delta\big(f(x)\big) = \Delta_0\big(f(x)\big).$$

A demonstração do Lema 1 pode ser encontrada em Proposition V-22, [5].

4. Conclusão

Ao longo da história, conceitos algébricos foram desenvolvidos e publicados por uns matemáticos e continuados por outros. Dessa forma, observa-se como se deu a ligação entre eles e de que maneira se procedeu à sequência dos conteúdos construídos.

Os livros didáticos da educação básica trazem métodos de resolução apenas para as equações de 1° e 2° graus que, no que se refere às de 2° grau, é mostrada a resolução das equações de 4° grau, chamadas de biquadradas, da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Apresentamos, neste artigo, para o conhecimento de discentes e docentes, também a fórmula resolutiva para as equações de 3° grau da forma $x^3 + px + q = 0$, incluindo o estudo do sinal do discriminante. Quanto ao discriminante de polinômios nos livros didáticos, somente é mencionado para polinômios de 2° grau; exploramos, também neste trabalho, o estudo de discriminantes de polinômios de graus arbitrários.

Almejamos, com este trabalho, auxiliar professores no estudo de equações polinomiais e discriminantes de polinômios para nossas práticas pedagógicas, mesmo que alguns conceitos não sejam comuns no ensino básico, mas poderão ser explorados na íntegra ou como complemento de conteúdos programáticos já previstos.

Referências

[1] Amaral, João T. “ Método de Viète para Resolução de Equações do 2° Grau”. *Revista do Professor de Matemática* - Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, Universidade de Guarulhos, v. 13, p. 18-20, 1988.

[2] Baumgart, J. K. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*, Tradução de Hygino Hugueros Domingues, São Paulo, Atual, Vol. 4, 1992.

[3] Boyer, C. B. *História da Matemática*, Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo, 2. ed., Edgard Blucher Ltda, 1996.

[4] Dias, D. P. *O Binômio Discriminante na Fórmula Resolvente, ou o Discriminante da Fórmula de Bháskara, de uma Equação de Segundo Grau com Coeficientes Inteiros*, São Paulo, IME-USP, 2018.

[5] Eisenbud, D.; Harris J. “ The Geometry of Schemes”, *Graduate texts in mathematics*, Board, 197, 1991.

[6] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Hygino Hugueros Domingues, São Paulo, Editora da Unicamp, 2004.

[7] Garbi, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo, 2ª. ed., Livraria de Física, 2007.

[8] Hoyrup, J. “ Old Babylonian “Algebra”, and What it Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics”. Kozhikode: ICM Satellite Conference, *Mathematics in Ancient times*, p. 11-14, sep. 2010.

[9] Janson, S. *Resultant and Discriminant of Polynomials*, Departament of Mathematics, Uppsala University, aug. 2010.

[10] Souza, A. L. *Discriminantes de Equações Com Uma Variável*, Dissertação, Mestrado Profissional em Rede Nacional - Profmat. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021.

[11] Lima, Elon L. “ A Equação do 3° Grau”. Rio de Janeiro: *Artigos - Matemática Universitária*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, n. 5, p. 9-23, jun. 1987.

[12] Pedroso, Hermes A. "Uma Breve História da Equação do 2° grau". São Paulo: *Revista Eletrônica de Matemática* (REMat), n. 2. 2010.

[13] Woody, H. *Polynomial Resultants*, Departament of Mathematics and Computer Science University of Puget Sound, 2016.

Alberis L. de Souza
Universidade Federal da Paraíba
<berislins@gmail.com>

Wállace M. de Sousa
Universidade Federal da Paraíba
<wallace@mat.ufpb.br>

Recebido: 20/10/2021
Publicado: 08/06/2022