PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.10, n.3, 2022
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1026

Triplos pitagóricos e as interações entre álgebra, geometria e aritmética

Rubens Vilhena Fonseca   Ana Paula Sales Brito   Gabriel Dias de Pinho
Yuri Albino Marigliani   Richard Campos Vilhena Fonseca

Resumo

Neste artigo, apresentamos quatro teoremas, não muito presentes nos livros didáticos, e que geralmente não estão inclusos nos currículos da Escola Básica, com o objetivo de que o leitor perceba a interação entre as diferentes áreas da Matemática mais comuns aos estudantes, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Espera-se que as provas desses teoremas, além de ilustrar a conexão entre essas áreas, destacadas neste artigo, mostrem a necessidade de essas áreas interagirem entre os vários tipos de pensamentos matemáticos. Acreditamos que o professor, ao considerar o entrelaçamento desses tópicos, tende a refletir e elaborar tipos de atividades que ampliem o que é apresentado em sala de aula. Por meio de nossas pesquisas bibliográficas, foi possível observar suas implicações didáticas, correlações com a Base Nacional Comum Curricular e algumas teorias educacionais envolvidas que, devido ao nosso objetivo, não serão objetos de discussão, mas estão implícitas neste texto.

Palavras-chave: álgebra; geometria; trigonometria; teoria dos números

Abstract

In this article, we present four theorems, not very present in textbooks, and which are generally not included in the Basic School curricula, with the objective that the reader perceives the interaction between the different areas of Mathematics most common to students, namely Arithmetic, Algebra, Geometry and Trigonometry. It is hoped that the proofs of these theorems, in addition to illustrating the connection between these areas, highlighted in this article, show the need for these areas to interact between the various types of mathematical thinking. We believe that the teacher, when considering the intertwining of these topics, tends to reflect and elaborate types of activities that expand what is presented in the classroom. Through our bibliographic research, it was possible to observe its didactic implications, correlations with the National Curricular Common Base and some educational theories involved that, due to our objective, will not be objects of discussion, but are implicit in this text.

Keywords: algebra; geometry; trigonometry; number theory

1. Introdução

Nossa motivação ao escrever este artigo deu-se pela percepção, como professores de Matemática, de que os conteúdos matemáticos passam por inúmeras modificações no decorrer do tempo [10].

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

O que se pode apresentar nos livros didáticos é uma versão sem os dramas humanos de erros, frustrações e acertos que levaram à evolução daqueles conteúdos, além da omissão, por uma questão de necessidade, de muitos resultados paralelos importantes que foram obtidos no estudo de um problema em particular. Sendo nosso objetivo que o leitor perceba a interação entre diferentes áreas da matemática, destacamos o Teorema de Pitágoras e os Triplos Pitagóricos, por serem tópicos de estudos na Teoria dos Números que sempre rendem resultados surpreendentes e podem nos auxiliar na elaboração de uma didática eficiente para o ensino. Em particular, centramos neste artigo as conexões entre a Aritmética, Álgebra e Geometria.

Primeiramente, definimos o que são triplos e triângulos pitagóricos. O Teorema 1 apresenta a forma geral de como obtê-los. Nesse contexto, é feita uma sugestão que conduza à discussão do Teorema Fundamental da Aritmética para alunos da Escola Básica. Em seguida, discutimos a fórmula de Heron.

A partir desses resultados, na terceira seção, consideramos a instauração de um desafio a ser proposto em sala de aula, e a trigonometria apresenta-se como o ramo da Matemática ideal para fazer a interação necessária com outros ramos. Para isso, apresentamos os conceitos de inraio e incírculo num triângulo pitagórico para obtermos resultados como os Teoremas 2 e 3, que se constituem como prova de que as conexões entre Geometria, Álgebra e Aritmética são possíveis.

Afirma-se que, certa vez, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) disse: "A Matemática é a Rainha das ciências e a Teoria dos Números (Aritmética) é a Rainha da Matemática" [4, p. 435]. David M. Burton (1930-2016), que foi professor emérito de Matemática da University of New Hampshire, escreveu: "Para aqueles que, como Gauss, consideram a Teoria dos Números a 'Rainha da Matemática', a Lei de Reciprocidade Quadrática é uma das joias em sua coroa" [2, p. 167]. Neste artigo, nosso interesse é apresentar outros assuntos relacionados à Teoria dos Números que auxiliem no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

2. Teorema de Pitágoras e os triplos pitagóricos

O Teorema de Pitágoras é apresentado aos alunos do Ensino Fundamental. Para o aprendizado desse conteúdo, é exigida dos alunos a habilidade, descrita na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3], de resolver e de elaborar problemas de aplicação desse teorema [3, p. 271], postulando que a soma dos quadrados dos catetos a e b de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa c. Em símbolos (Figura 1):

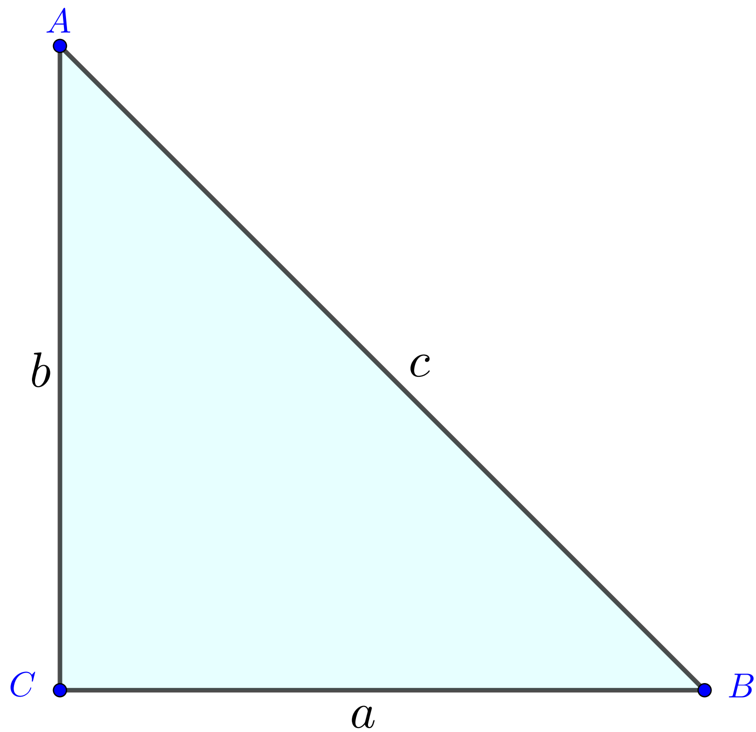

Figura 1: Para o triângulo retângulo de catetos a, b e hipotenusa c, vale a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

Uma vez que estamos interessados em promover um encontro entre a Álgebra, Geometria e a Aritmética (Teoria dos Números), iremos nos concentrar principalmente nos triângulos pitagóricos, que são triângulos retângulos cujos lados (a, b, c) são números inteiros positivos (naturais), chamados de triplos pitagóricos [9], cujo estudo começou muito antes da época de Pitágoras. Existem tabuinhas babilônicas que contêm lista desses triplos, incluindo alguns bem grandes, indicando que os babilônios provavelmente tinham um método sistemático para produzi-las [15]. Ainda mais surpreendente é o fato de que os babilônios podem ter usado suas listas de triplos pitagóricos como tabelas trigonométricas primitivas [16]. Os triplos pitagóricos também eram usados no antigo Egito [7].

Estudos arqueológicos demonstraram que os babilônios e egípcios tinham razões práticas para estudar os triplos pitagóricos. Essas razões ainda existem? Provavelmente não. No entanto, há pelo menos uma boa razão para estudar os triplos pitagóricos na Escola Básica, e é a mesma pela qual vale a pena estudar a arte de Rembrandt e a música de Beethoven. Há beleza e complexidade nas maneiras como os números interagem entre si, assim como há beleza e complexidade na composição de uma pintura ou sinfonia. Para apreciar essa beleza, é preciso estar disposto a despender uma certa quantidade de energia mental, porque o resultado na formação de quem está na escola para sua vida futura vale bem o esforço. Assim, neste artigo, as situações apresentadas procuram motivar o leitor a apreciar algumas verdadeiramente belas, refletir como acontece a interação entre diversas manifestações, como é o caso aqui da Aritmética, Álgebra e Geometria, e, principalmente, incentivar um processo de ensino e aprendizagem que considere conexões entre essas áreas da Matemática.

Uma das belezas da Aritmética é que ela usa muitas vezes suas ferramentas mais básicas, como a fatoração, paritismo, fator comum e divisibilidade, para nos provar grandes resultados. Uma vez que não nos prenderemos necessariamente a uma apresentação matemática abstrata ou axiomática, usaremos alguns conceitos da Teoria dos Números sem o rigor de um texto matemático sobre o assunto.

Vamos começar com uma pergunta típica em Teoria dos Números: existem infinitos triplos pitagóricos, ou seja, triplos de números naturais (a, b, c) satisfazendo a equação $a^2 + b^2 = c^2$? Esse questionamento é de fato positivo, por uma razão não muito difícil. Para mostrar que é assim, basta tomarmos um triplo pitagórico (a, b, c) e multiplicar por algum outro número k: obteremos um novo triplo pitagórico (ka, kb, kc). Isso é verdade porque,

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$$

Esses novos triplos pitagóricos não serão o foco deste artigo. Nossa atenção será em triplos pitagóricos sem fatores comuns, os chamados triplos pitagóricos primitivos.

Definição 1. Um triplo pitagórico primitivo (TPP) é um triplo de números naturais (a, b, c), tal que a, b e c não têm fatores comuns, ou seja, MDC(a, b, c) = 1, e satisfaz $a^2 + b^2 = c^2$.

Além dos dois triplos pitagóricos primitivos mais comuns $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$, incluímos uma pequena lista com outros na Tabela 1

a	b	c
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37

Tabela 1: Triplos pitágoricos.

Algumas questões podem ser observadas na Tabela 1. Por exemplo, o fato de que quando a é par, b é ímpar e vice-versa, isto é, a e b têm paritismo diferentes. Algo que pode ser conjecturado é que c é sempre ímpar. São questões interessantes para analisar mesmo em turmas do Ensino Fundamental, uma vez que não é difícil provar que essas conjecturas estão corretas. E o que é interessante é que, no meio da argumentação da prova, há outros fatos que precisam ser verificados, o que poderá enriquecer o debate em sala de aula.

Nesse sentido, no que segue, vamos explorar tal conjectura. Primeiro, se a e b fossem pares, então c também seria par. Isso significa que a, b e c teriam um fator comum múltiplo 2, portanto, o triplo pitagórico não seria primitivo. Em seguida, suponha que a e b fossem ímpares, o que implicaria que c teria que ser par. Isso diria que existem números naturais s, u e v tais que

$$a = 2s + 1, \quad b = 2u + 1, \quad c = 2v.$$

Podemos substituí-los na equação $a^2 + b^2 = c^2$, para obter

$$(2s + 1)^2 + (2u + 1)^2 = (2v)^2,$$

$$4s^2 + 4s + 4u^2 + 4u + 2 = 4v^2.$$

Dividindo por 2,

$$2s^2 + 2s + 2u^2 + 2u + 1 = 2v^2.$$

Essa última equação diz que um número ímpar é igual a um número par, o que é impossível; então a e b não podem ser ímpares. Como acabamos de verificar que eles não podem ter a mesma paridade, então é verdade que um é par e o outro é ímpar, isso significa ter paridade diferente. Logo, pela equação $a^2 + b^2 = c^2$ temos que c é ímpar.

Sempre podemos trocar o paritismo de a e b numa demonstração conforme nossa argumentação, sem com isso perder a generalização. Nosso problema agora é encontrar todas as soluções em naturais para a equação

$$a^2 + b^2 = c^2$$

com a par (ou ímpar), b ímpar (ou par) e a, b, c sem fatores comuns.

Nossa primeira observação é que se (a, b, c) é um triplo pitagórico primitivo, então podemos fatorar

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b).$$

Observe pela Tabela 2 que sempre que consideramos a como ímpar e b como par, parece que $(c-b)$ e $(c + b)$ são sempre quadrados:

a	b	c	$a^2 = c^2 - b^2$	(c - b)(c + b)
3	4	5	$3^2 = 5^2 - 4^2$	1 . 9
5	12	13	$5^2 = 13^2 - 12^2$	1 . 25
7	24	25	$7^2 = 25^2 - 24^2$	1 . 49
15	8	17	$15^2 = 17^2 - 8^2$	9 . 25

Tabela 2: Triplos pitagóricos primitivos e fatorações.

Logo, precisamos provar que (c - b)(c + b) são quadrados. Outro fato que tende a ser aparente, observando a Tabela 2 acima, é que (c - b)(c + b) parecem não ter fatores comuns. Vamos provar agora essa última afirmação.

Suponha que d seja um fator comum de (c - b)(c + b); ou seja, d divide (c - b) e (c + b). Então d também divide

$$(c - b) + (c + b) = 2c \text{ e } (c + b) - (c - b) = 2b.$$

Assim, d divide 2b e 2c. Mas b e c não têm fatores comuns porque estamos assumindo que (a, b, c) é um triplo pitagórico primitivo. Portanto, d deve ser igual a 1 ou 2. Mas d também divide $(c - b)(c + b) = a^2$, e a pode ser ímpar, então d teria que ser sempre 1, para evitar contradições.

Em outras palavras, o único número que divide sempre (c - b) e (c + b) é 1, então (c - b) e (c + b) não têm fatores comuns.

Agora sabemos que (c - b) e (c + b) são inteiros positivos sem fatores comuns. O seu produto é um quadrado, pois $(c-b)(c+b) = a^2$. A única maneira disso acontecer é se (c - b) e (c + b) forem, eles próprios, quadrados.

Assumindo agora, sem perda de generalidade, que a é par e que b é ímpar, vamos escrever $a = 2t$ e colocar isso na equação $a^2 + b^2 = c^2$, obtendo,

$$(2t)^2 + b^2 = c^2.$$

e assim

$$(2t)^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b),$$

que podemos reescrever como

$$t^2 = \frac{(c+b)}{2} \cdot \frac{(c-b)}{2} \tag{1}$$

Note que como b e c são ambos ímpares, sua soma e diferença são ambas pares; consequentemente, cada um dos fatores na equação (1) é um inteiro, e esses inteiros são relativamente primos. Caso tivessem um fator comum, então a soma $\frac{(c+b)}{2} + \frac{(c-b)}{2} = c$ e a diferença $\frac{(c+b)}{2} - \frac{(c-b)}{2} = b$. E em vista da equação $a^2 + b^2 = c^2$, esse fator comum também seria compartilhado por a, ao contrário da suposição de que (a, b, c) é primitivo.

Agora, uma vez que o lado esquerdo da equação anterior é um quadrado perfeito, o mesmo ocorre com o lado direito, e os dois fatores do lado direito são relativamente primos. Os primos na fatoração de $(c-b)$ serão distintos dos primos na fatoração de $(c+b)$. Essas fatorações em primos devem incluir em cada fator um número igual de vezes; ou seja, cada um dos fatores do lado direito é em si um quadrado perfeito. Então vamos escrever duas equações

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \frac{c-b}{2} = n^2 \tag{2}$$

onde m e n são relativamente primos, e $m > n$. Adicionando e subtraindo equações às duas equações acima, obtemos $c = m^2 + n^2$ e $b = m^2 - n^2$; e como b e c são ímpares, qualquer uma dessas últimas equações mostram que m e n têm paritismo diferentes. Finalmente, substituindo as equações (2) na equação (1), ficamos com $t^2 = m^2n^2$, a partir do qual $t = mn$ e, portanto, $a = 2mn$.

Assim, podemos afirmar, obviamente não com tanto rigor quanto necessário, que temos uma prova para o seguinte teorema [19, 11]:

Teorema 1. *Para um triângulo pitagórico com catetos a, b e hipotenusa c, qualquer triplo pitagórico primitivo pode ser escrito como*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2.$$

Onde m e n são dois inteiros positivos quaisquer, $m > n$, m *e* n *são relativamente primos e com paridades diferentes.*

Nosso comentário a respeito do "rigor" vem do fato de termos assumido que existe uma única decomposição em fatores primos para cada número natural. De modo nenhum essa é uma afirmação óbvia. Uma sugestão de como apresentar uma ideia desse assunto a nível de escola básica, poderia ser como segue.

Pedir para os alunos considerarem em uma realidade, com uma outra aritmética, onde os únicos números que são conhecidos são os números pares. Então, neste mundo, os únicos números que existem são

$$\rho = \{..., -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}.$$

Observe que nessa realidade podemos adicionar, subtrair e multiplicar números como de costume, já que a soma, a diferença e o produto de números pares são novamente números pares. Também podemos falar sobre divisibilidade. Podemos dizer que um número m divide um número n se houver um número k com n = mk. Mas lembre-se que estamos agora nessa nova realidade, então a palavra "número" significa um número que pertence a ρ. Por exemplo, 6 divide 12, uma vez que $12 = 6 \times 2$; mas 6 não divide 18, uma vez que não há um número k em ρ satisfazendo $18 = 6k$.

Podem-se definir números primos nessa nova situação. Diremos que um número p é primo se não for divisível por qualquer número em ρ. Observe que, nessa realidade, um número não é divisível por si mesmo. Assim, temos alguns primos:

$$2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.$$

Em nossa aritmética, prova-se que se um número primo divide um produto ab, então ele divide a ou divide b [17, p. 109]. Agora voltemos à nova situação em que colocamos os alunos e consideremos o primo 6 e os números r = 10es = 18. O número 6 divide r.s = 180, uma vez que $180 = 10 \times 18$; mas 6 não divide nem o 10 nem o 18. Então, uma verdade em nossa aritmética, não é verdade nessa nova aritmética.

Consideremos agora o fato de que cada número pode ser fatorado como um produto de primos exatamente de uma maneira, a menos da ordem dos fatores. Uma atividade pode consistir nos alunos mostrarem que nessa aritmética cada número pode ser escrito como um produto de primos. Mas consideremos as seguintes fatorações:

$$180 = 6 \times 30 = 10 \times 18.$$

Os alunos poder ver que todos os números 6, 30, 10 e 18 são primos. Isso significa que 180 pode ser escrito como um produto de primos de duas maneiras diferentes. Os alunos podem verificar se há mais maneiras de escrevê-lo como um produto de primos. Situações como essa, permitem que o professor inicie um debate matemático, mesmo que o rigor e as demonstrações ainda não sejam possíveis.

Trabalhar com Números Primos já é ter acesso a uma gema com complexidade, preciosidade e beleza muito especiais. A seguir, vamos apresentar outro fato em que a Álgebra e a Geometria estão conectadas.

2.1. A fórmula de Heron

A partir da conhecida fórmula para o cálculo da área do triângulo, é possível deduzir algebricamente uma fórmula que nos fornece a área de um triângulo, a partir dos seus elementos mais básicos, a medida de seus lados. Essa fórmula é atribuída a Heron (ou Herão) de Alexandria (10 d.C.-80 d.C.), e garante-nos que, em um triângulo qualquer, a área é dada por $\mathrm{A} = \sqrt{(\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c}))}$, sendo $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ as medidas dos lados e $\mathrm{s} = \frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})}{2}$ o semiperímetro do triângulo ilustrado na Figura 2.

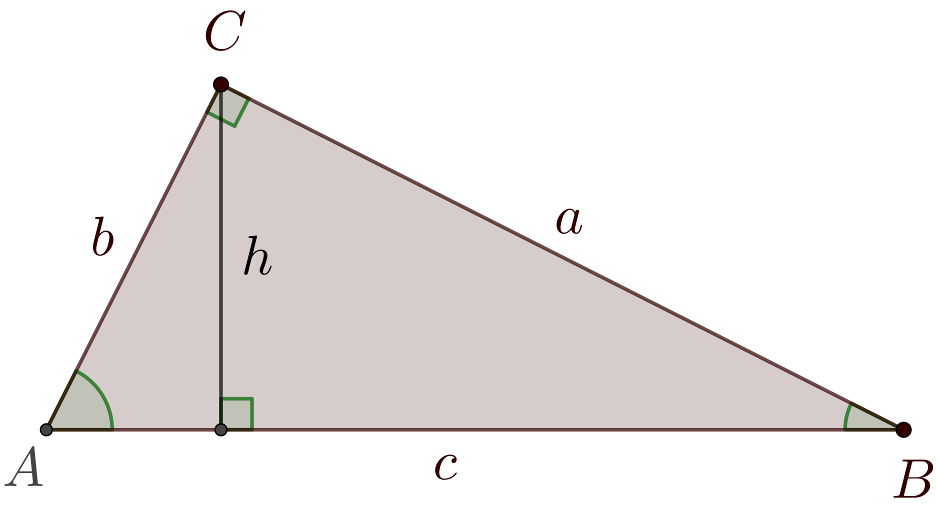

Figura 2: Triângulo de lados $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ e altura h.

Assim, para os propósitos da nossa demonstração,

$$\begin{aligned} 2\mathrm{s} =& \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}, \qquad 2(\mathrm{s}-\mathrm{a}) = -\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}, \\ 2(\mathrm{s}-\mathrm{b}) =& \mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}, \qquad 2(\mathrm{s}-\mathrm{c}) = \mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c}. \end{aligned}$$

Há pelo menos um lado do triângulo dado, cuja altura está "dentro" do triângulo. Por conveniência, seja esse lado o de medida c. Informamos que não fará nenhuma diferença: tal escolha apenas dá um referencial para nossa argumentação [14].

Nossa tarefa é expressar h em termos de a, b e c, substituí-lo em $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{ch}$ (Figura 3).

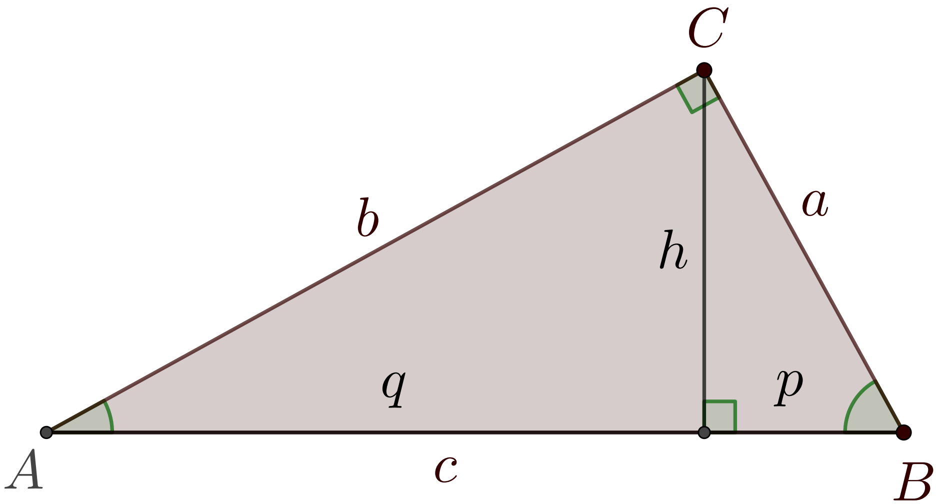

Figura 3: Triângulos retângulos de lados $\mathrm{a, p, h}$ e $\mathrm{b, q, h}$.

Seja $\mathrm{p+q=c}$ como indicado. Então,

$$\mathrm{h^2+p^2=a^2 \text{ e } h^2+q^2=b^2}$$

Uma vez que $\mathrm{q = c - p}$, então $\mathrm{q^2=(c-p)^2 \iff q^2=c^2-2cp+p^2}$. Adicionando $\mathrm{h^2}$ a ambos os lados da igualdade, temos $\mathrm{h^2+q^2=h^2+p^2-2cp+c^2}$.

Agora, substituindo, nessa equação, os valores correspondentes, temos $\mathrm{b^2=a^2-2cp+c^2}$, e resolvendo em p, obtemos

$$\mathrm{p=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}}$$

Uma vez que $\mathrm{h^2=a^2-p^2=(a+p)(a-p)}$, teremos:

$$\mathrm{h^2=\left[a+\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c}\right]\left[a-\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c}\right]}$$

$$\mathrm{=\frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2-b^2)}{4c^2}}$$

$$\mathrm{=\frac{(a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)}{4c^2}}$$

$$\mathrm{=\frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{(4c^2)}}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}$$

$$= \frac{(2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c))}{(4c^2)}.$$

Logo,

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$

E uma vez que

$$A = \frac{1}{2}ch,$$

então,

$$A = \frac{1}{2}c\left(\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}\right),$$

e

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Na seção a seguir, apresentaremos mais algumas conexões entre Álgebra, Geometria e Aritmética.

3. Interações matemáticas e a sala de aula

Na Teoria dos Números, há importantes fatos sobre os triângulos pitagóricos, como o inraio e o incírculo [2, p. 248]. Ao apresentar uma prova, em nível elementar, de que o inraio de um triângulo pitagórico é um número inteiro, pode-se refletir de que forma os assuntos que têm relação com o conjunto dos números inteiros estão distribuídos ao longo da Educação Básica, considerando um planejamento que envolva uma geometria com números inteiros.

Ao se estudar os triângulos pitagóricos na Escola Básica, é dada uma grande atenção aos lados do triângulo. Mas o que pode ser dito sobre os ângulos de um triângulo pitagórico? O professor desse nível de ensino pode surpreender e motivar seus alunos ao mostrar que o estudo do incírculo leva a um resultado fundamental sobre esses ângulos, e que o incírculo dá um significado geométrico simples para os fatores que ocorrem no radical na fórmula de Heron.

Desafiar os alunos a encontrar triângulos não retângulos com lados inteiros e inraios inteiros seria uma excelente atividade envolvendo grupos de alunos e o uso da calculadora. Uma possibilidade é começar com quaisquer dois triângulos pitagóricos e, em seguida, criar um triângulo a partir de ampliações e uniões dos dois originais.

A seguir, apresentamos o que consideramos acima e concluímos com mais um fato que pode ser interessante para os alunos da Escola Básica: como dois triângulos pitagóricos estão relacionados pelo incentro.

a	b	c	r
3	4	5	1
5	12	13	2
7	24	25	3
9	40	41	4

Tabela 3: Medidas dos inraios.

3.1. O inraio do incírculo

O incírculo de um triângulo é um círculo inscrito neste triângulo. A Figura 4 ilustra o incírculo de um triângulo pitagórico e o seu raio (inraio). O centro I do incírculo (incentro) é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo. Neste artigo, discutimos vários fatos incomuns sobre triângulos pitagóricos relacionados a propriedades do inraio

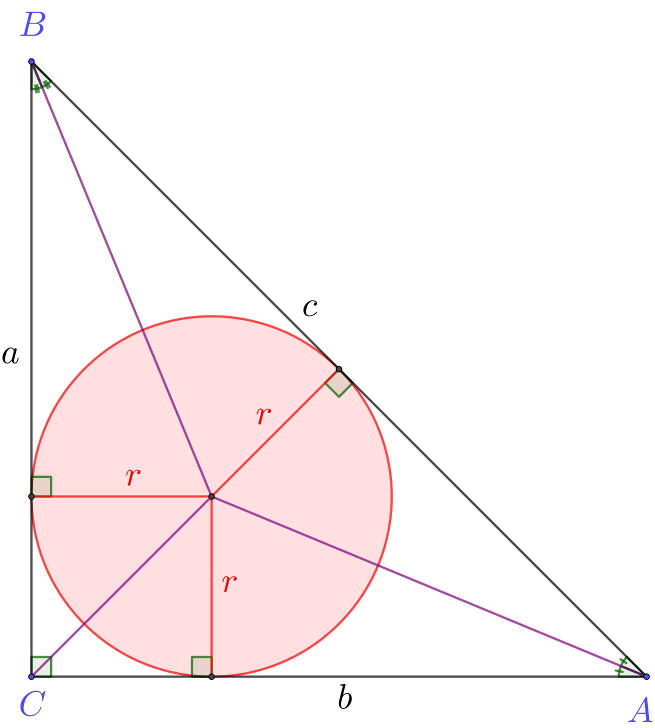

Figura 4: Incírculo em um triângulo retângulo.

O inraio r, do incírculo de um triângulo pitagórico, é um número inteiro [5, p. 11]. Por exemplo, o inraio do triângulo (3, 4, 5) é igual a 1 e o inraio do triângulo $(5, 12, 13)$ é igual a 2 e outros valores são mostrados na Tabela 3. Agora, iremos apresentar uma prova a nível elementar, de que o inraio em um triângulo pitagórico é um número inteiro. Começamos com um teorema sobre o inraio do incírculo em qualquer triângulo [1].

Teorema 2. *Sejam* a, b *e* c *os lados de um triângulo. Seja* A*, a área do triângulo e* $\mathrm{s} = \frac{(\mathrm{a+b+c})}{2}$ *é o semiperímetro. Então, o inraio* r *do incírculo (Figura 5) é dado por*

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \ \textit{e} \ \mathrm{r} = \sqrt{\frac{(\mathrm{s-a})(\mathrm{s-b})(\mathrm{s-c})}{\mathrm{s}}}$$

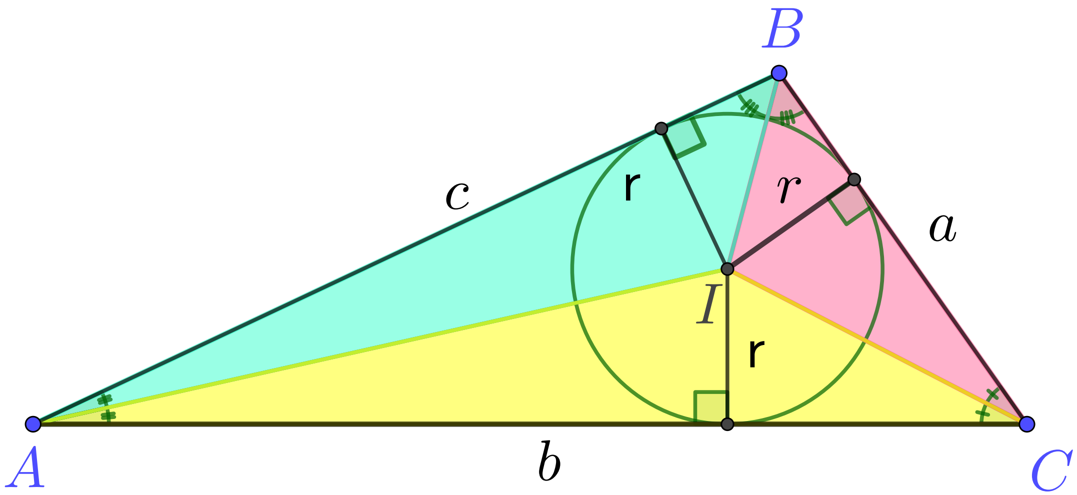

Figura 5: Inraio do incírculo em qualquer triângulo.

Demonstração. A área A do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos três triângulos interiores AIB, AIC e BIC formado pelas bissetrizes internas. Esta soma é

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{ra} + \frac{1}{2}\mathrm{rb} + \frac{1}{2}\mathrm{rc} = \frac{1}{2}\mathrm{r}(\mathrm{a+b+c}) = \mathrm{rs}$$

Logo, $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$.

De acordo com a fórmula de Heron, $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{s}(\mathrm{s-a})(\mathrm{s-b})(\mathrm{s-c})}$. Então,

$$\sqrt{\mathrm{s}(\mathrm{s-a})(\mathrm{s-b})(\mathrm{s-c})} = \mathrm{rs}$$

$$\mathrm{r}^2\mathrm{s}^2 = \mathrm{s}(\mathrm{s-a})(\mathrm{s-b})(\mathrm{s-c})$$

Assim, $\mathrm{r} = \sqrt{\frac{(\mathrm{s-a})(\mathrm{s-b})(\mathrm{s-c})}{\mathrm{s}}}$, o que conclui a prova

□

A seguir, queremos determinar o inraio em um triângulo pitagórico. Apresentamos duas demonstrações acessíveis e que podem servir para incentivar provas e demonstrações na Escola Básica [14].

Teorema 3. *Seja ABC um triângulo pitagórico com catetos a, b e hipotenusa c e o incírculo com incentro I neste triângulo. Então, o inraio*r *é um inteiro dado por* $\mathrm{r} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n})$.

Demonstração. Sejar o inraio do incírculo no triângulo pitagórico ABC como na Figura 6.

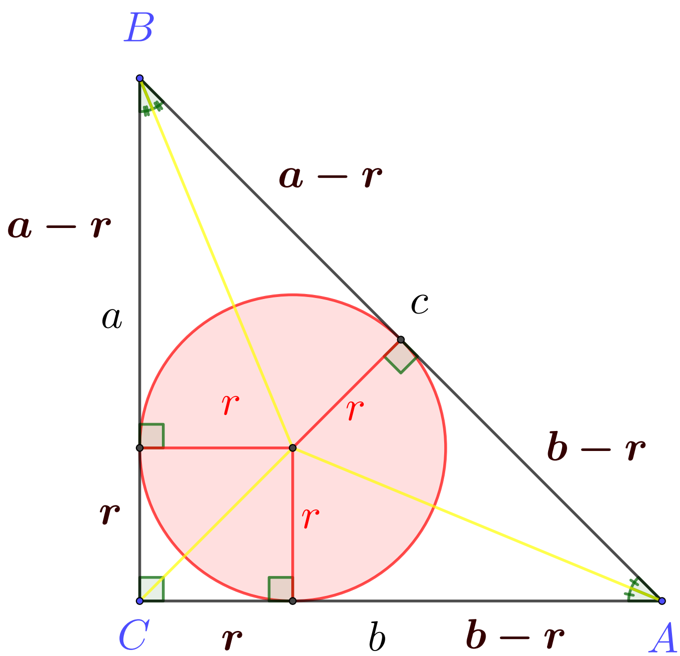

Figura 6: Triângulo pitagórico com catetos a, b e hipotenusa c e o incírculo com incentro I.

Assim,

$$\mathrm{c} = (\mathrm{a}-\mathrm{r}) + (\mathrm{b}-\mathrm{r}) = \mathrm{a}+\mathrm{b}-2\mathrm{r} \iff \mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c}}{2}$$

Como o triângulo é pitagórico,

$$\mathrm{r} = \frac{(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2+2\mathrm{mn}-\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)}{2} = \frac{(2\mathrm{mn}-2\mathrm{n}^2)}{2} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n}).$$

Logo,r é um inteiro dado por $\mathrm{r} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n})$. □

Demonstração. Na Figura 7, A área A do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos três triângulos interiores AIB, AIC e BIC formado pelas bissetrizes internas.

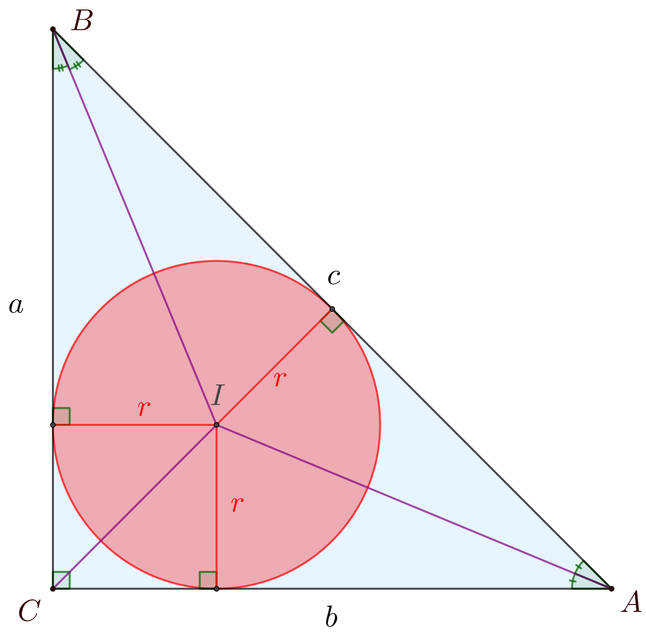

Figura 7: Três triângulos interiores AIB, AIC e BIC.

Então, A = Área AIB+ Área AIC+ ÁreaBIC.

$$\frac{1}{2}\mathrm{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{rc} + \frac{1}{2}\mathrm{ra} + \frac{1}{2}\mathrm{rb}$$

e,

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a+b+c}} = \frac{(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)2\mathrm{mn}}{(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2+2\mathrm{mn}+\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2)} = \frac{[2\mathrm{mn}(\mathrm{m}-\mathrm{n})(\mathrm{m}+\mathrm{n})]}{[2\mathrm{m}(\mathrm{m}+\mathrm{n})]} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n})$$

Logo, r é um inteiro dado por $\mathrm{r} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n})$. □

A seguir, uma interação entre Aritmética, Álgebra e Trigonometria. Depois de analisar nossos apontamentos, pretendemos que a apresentação evidencie a validade a interação para a educação do pensamento matemático nas escolas, e a trigonometria é o ramo da Matemática que permite essa interação.

3.2. Conexão com a trigonometria

Nesta subseção, mostraremos que os ângulos formados pelas bissetrizes dos triângulos pitagóricos satisfazem algumas relações interessantes. A Figura 8 ilustra os detalhes de vários segmentos no triângulo pitagórico relacionados ao incentro [13]. As medidas desses segmentos podem ser deduzidas através dos casos de semelhança de triângulos e com o fato de o inraio ser $\mathrm{r} = \mathrm{n}(\mathrm{m}-\mathrm{n})$.

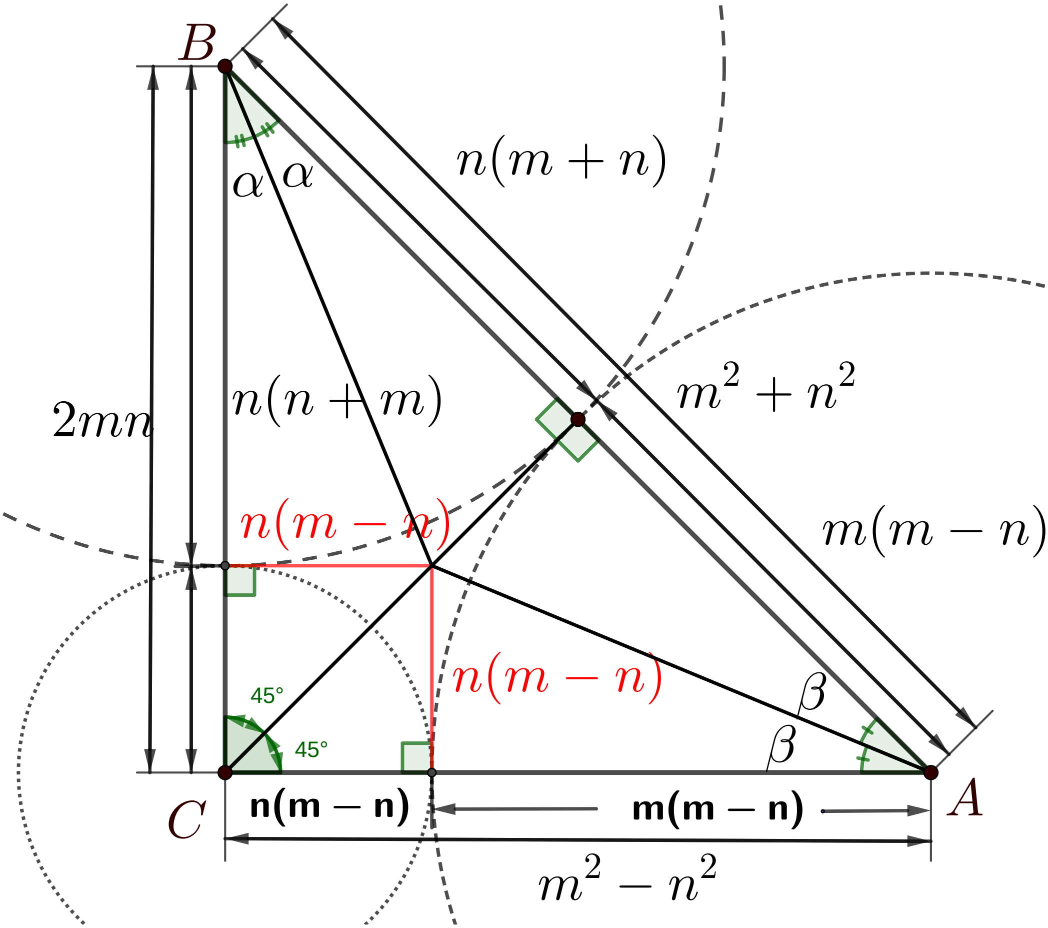

Figura 8: Bissetrizes do triângulo pitagórico.

Do triângulo pitagórico de lados $\mathrm{a} = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2$, b=2mn e $\mathrm{c} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2$, obtemos as seguintes relações trigonométricas:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}{2\mathrm{mn}} \iff 2\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}{2\mathrm{mm}}\right)$$

e

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\mathrm{mn}}{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2} \iff 2\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\mathrm{mn}}{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}\right)$$

temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathrm{m} - \mathrm{n}}{\mathrm{m} + \mathrm{n}} \iff \alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{m} - \mathrm{n}}{\mathrm{m} + \mathrm{n}}\right)$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} \iff \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}\right)$$

Notemos que os arco-tangentes dos ângulos 2α e 2β são funções racionais quadráticas de m e n, enquanto os arco-tangentes correspondentes às metades α e β são expressões racionais lineares mais simples. Em particular, a relação entre os triplos pitagóricos e essas expressões fornece de imediato o seguinte teorema:

Teorema 4. *Seja $\frac{n}{m}$ qualquer número racional positivo tal que $\frac{n}{m} < 1$. Existe um triângulo pitagórico com um ângulo agudo tal que a tangente da metade desse ângulo é igual a $\frac{n}{m}$.*

Vejamos outro fato que surge desse encontro entre Teoria dos Números, Geometria, Álgebra e Trigonometria.

Uma vez que $2\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, então $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Substituindo os valores de α e β pelos arco-tangentes, temos:

$$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Essa relação trigonométrica tem consequências. Se fizermos $m = 1$ e $n = 2$, temos o retângulo pitagórico $(3, 4, 5)$, e a relação fica

$$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

É um fato em que, sempre que há interações entre os diferentes ramos da Matemática, grandes resultados são obtidos [8].

A seguir vamos voltar à fórmula de Heron.

3.3. Os fatores na fórmula de Heron

Foi provado anteriormente que a fórmula de Heron para a área de um triângulo com os lados a, b. c em termos do semiperímetro s é dada por:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nesta subseção, mostramos o significado geométrico dos fatores no radical que às vezes parecem estranhos a alguns estudantes. A prova original de Heron usa um argumento geométrico complexo que começa com a construção do incírculo, como pode ser visto em [6]. A seguir, analisaremos a importância dos fatores que aparecem sob o radical [1].

Seja o triângulo ABC ilustrado na Figura 9. Sejam P, Q e R os pontos onde o incírculo tangencia os lados do triângulo. Provaremos que os fatores na fórmula de Heron são dados por:

$$s - a = z = AP = AQ, \quad s - b = x = BP = BR, \quad s - c = y = CQ = CR$$

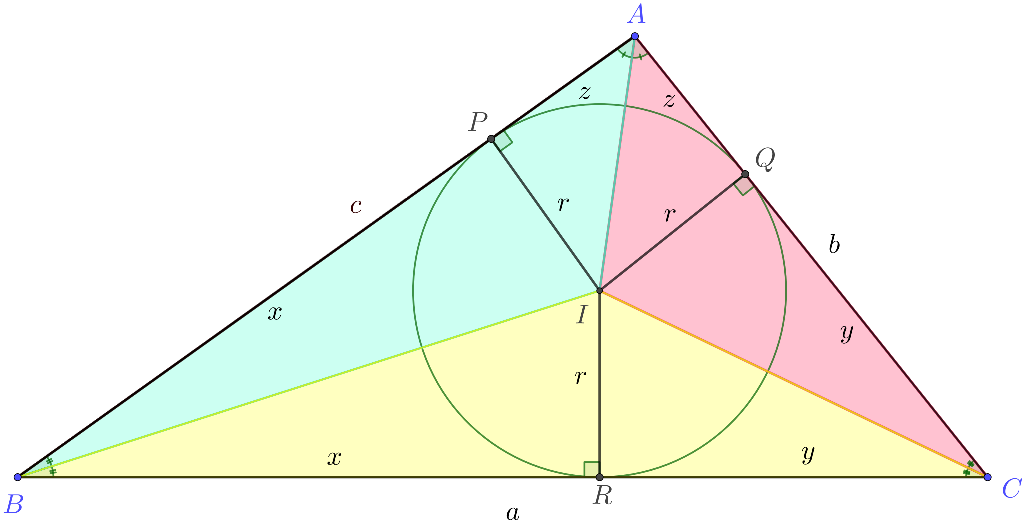

Figura 9: Pontos P, Q e R onde o incírculo tangencia os lados do triângulo.

Vemos que

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=2\mathrm{x}+2\mathrm{y}+2\mathrm{z} \text{ e como } \mathrm{s}=\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})}{2}, \text{ logo } 2\mathrm{s}=\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=2\mathrm{x}+2\mathrm{y}+2\mathrm{z},$$

e assim temos,

$$\mathrm{s}=\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}.$$

Vemos imediatamente a partir da Figura 9 que

$$\mathrm{a}=\mathrm{x}+\mathrm{y}, \quad \mathrm{b}=\mathrm{y}+\mathrm{z}, \quad \mathrm{c}=\mathrm{x}+\mathrm{z}.$$

Façamos $\mathrm{s}–\mathrm{a}=\mathrm{z}$, $\mathrm{s}-\mathrm{b}=\mathrm{x}$ e $\mathrm{s}–\mathrm{c}=\mathrm{y}$. Isso completa nossa prova.

Mostramos que o incírculo de um triângulo divide os lados do triângulo em segmentos que são os fatores que aparecem na fórmula de Heron.

Na subseção seguinte, comentaremos como encontrar triângulos não retângulos com lados inteiros e inraios inteiros.

3.4. Triângulos pseudopitagóricos

Em geral, um triângulo não pitagórico com lados inteiros terá um incírculo cujo raio provavelmente será irracional. No entanto, é fácil criar triângulos com lados inteiros com inraios inteiros que chamaremos de pseudopitagóricos, como mostraremos agora. Na Figura 10, começamos com dois triângulos pitagóricos: $(5, 12, 13)$ e $(3, 4, 5)$.

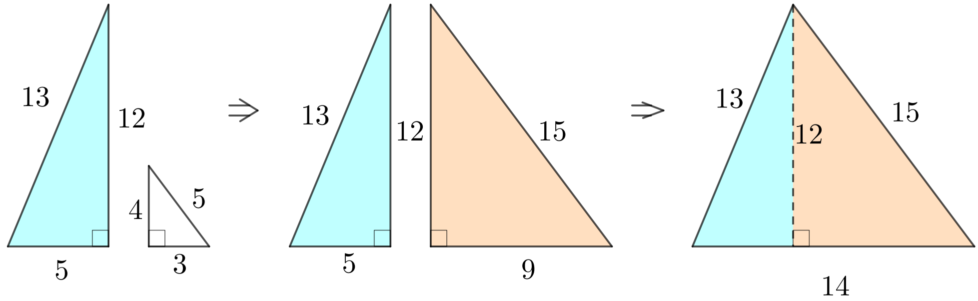

Figura 10: Triângulos pseudopitagóricos.

Então, ampliamos $(3, 4, 5)$ multiplicando cada lado por 3. Agora os dois lados verticais são 12, e assim os triângulos podem ser unidos para formar um novo triângulo não pitagórico com lados (13, 14, 15). Os triângulos pitagóricos sempre têm área inteira, porque um dos catetos é sempre um número par. Desse modo, o triângulo criado unindo dois triângulos pitagóricos deve ter área inteira. Pela Figura 11, vemos que a área é $\mathrm{A} = \frac{12.14}{2} = 84$. O Teorema 1 afirma que o inraio r do incírculo para esse triângulo $(13, 14, 15)$ é dado por $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} = \frac{84}{21} = 4$ (Ver Figura 11) .

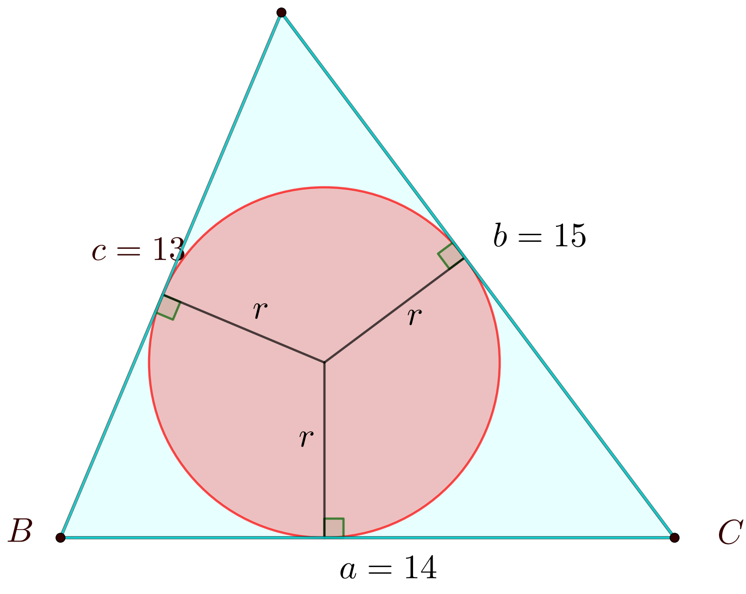

Figura 11: Inraio r do incírculo para o triângulo de lados $(13, 14, 15)$.

Podemos repetir o procedimento acima começando com quaisquer dois triângulos pitagóricos. Ao ampliar um (ou talvez ambos) os triângulos por um fator inteiro, os lados verticais tornam-se iguais e, portanto, podem ser unidos como acima. Este novo triângulo possui área inteira. O inraio calculado a partir do Teorema 1 é, portanto, um inteiro ou um número racional. Se r for racional, todo o triângulo pode ser ampliado por um fator inteiro apropriado para que o novo inraio seja um inteiro.

Na última subseção, apresentamos uma construção muito singular. A partir do incentro de um triângulo pitagórico, podemos construir um novo triângulo pitagórico

3.5. Triângulos Pitagóricos unidos por um incentro

Um triângulo pitagórico de medidas (3, 4, 5) pode ser encontrado a partir de um triângulo pitagórico de medidas (7, 24, 25) como ilustra a Figura 12.

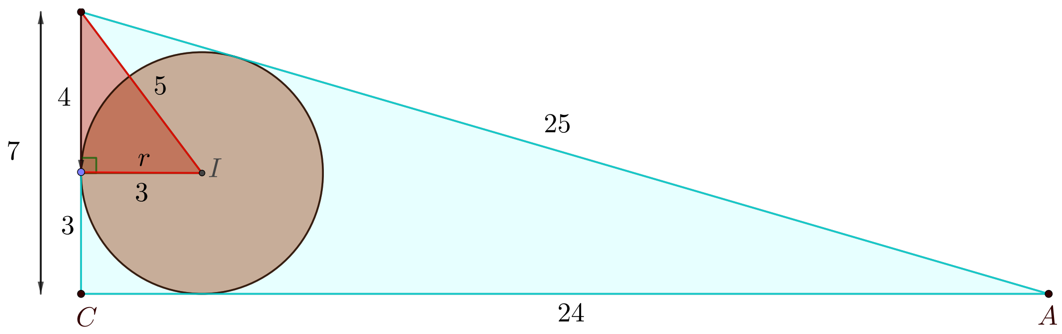

Figura 12: Triângulo pitagórico de medidas (3, 4, 5) a partir de um triângulo pitagórico de medidas (7, 24, 25).

Nesta subseção, generalizaremos tal fato ilustrado na Figura 12 acima [12]. Ou seja, em um triângulo pitagórico BAC, teremos um triângulo pitagórico interno BIQ como ilustrado na Figura 12. Para quais medidas do triângulo pitagórico maior BAC, o triângulo retângulo menor BIQ também é pitagórico?

Abaixo, temos um segundo exemplo (Figura 13), ilustrando a obtenção do triângulo pitagórico BIQ de medidas (35, 84, 91) a partir do triângulo pitagórico BAC de medidas (119, 120, 169).

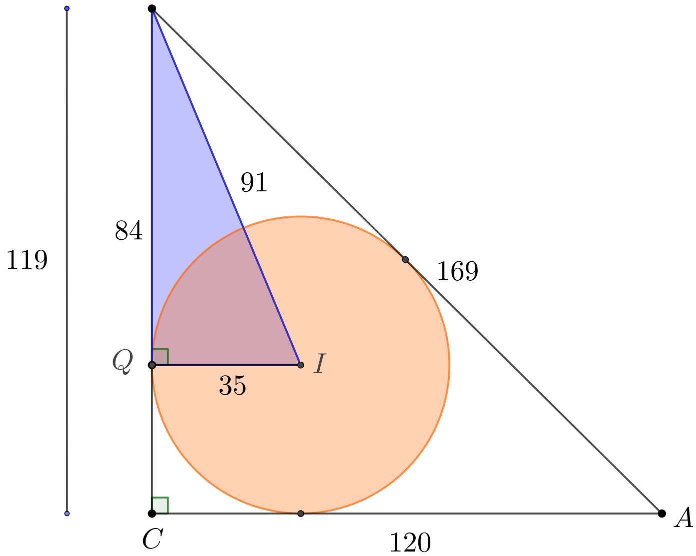

Figura 13: Triângulo pitagórico BIQ de medidas $(35, 84, 91)$ a partir do triângulo pitagórico BAC de medidas $(119, 120, 169)$.

Como o segmento que vai do vértice B até o incentro I é uma bissetriz, temos ângulos de θ e 2θ em B, respectivamente para os triângulos retângulos BIQ e BAC (Figura 14)

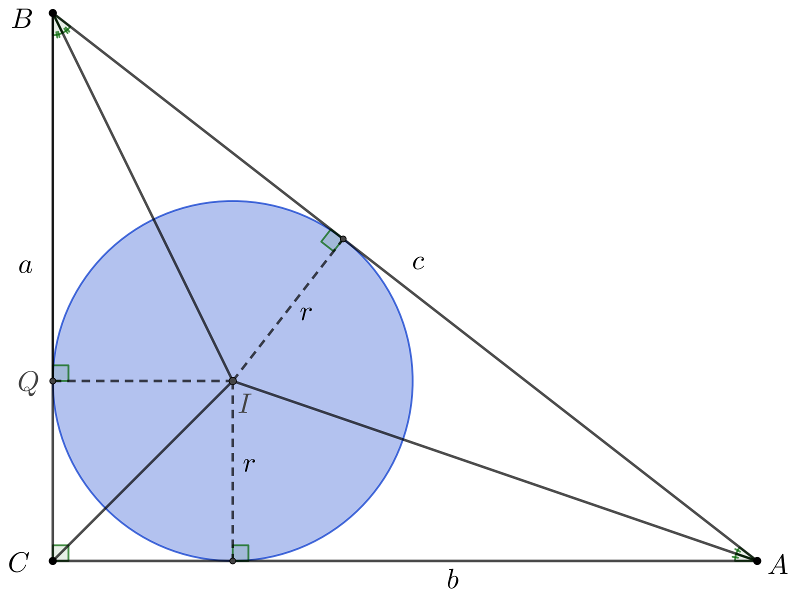

Figura 14: Triângulos retângulos BIQ e BAC.

Se o triângulo BIQ for pitagórico, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m^2-n^2}{2mn} \text{ ou } \operatorname{tg}\theta = \frac{2mn}{m^2-n^2},$$

uma vez que apenas um deles é menor que 1, pois são recíprocos.

Usando a identidade $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$, temos:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\frac{(m^2-n^2)}{2mn}}{1-\left[\frac{(m^2-n^2)}{2mn}\right]^2} = \frac{4mn(m^2-n^2)}{(2mn)^2-(m^2-n^2)^2}$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\frac{2mn}{(m^2-n^2)}}{1-\left[\frac{2mn}{(m^2-n^2)}\right]^2} = \frac{4mn(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2-(2mn)^2}$$

Como esses valores são simétricos, escolhemos o caso para o qual $\operatorname{tg} 2\theta > 0$ ou seja, $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ dependendo se m^2-n^2 é menor ou maior que 2mn.

Vamos mostrar que o numerador $4mn(m^2-n^2) = 4mn(m+n)(m-n)$ e o denominador $(m^2-n^2)^2-(2mn)^2 = (m^2-n^2+2mn)(m^2-n^2-2mn)$, são relativamente primos. O denominador é ímpar uma vez que m e n têm paridade diferente.

Suponha que um primo $p > 2$, divide $(m+n)$ no numerador e $(m^2-n^2)^2-(2mn)^2 = (m+n)^2(m-n)^2-(2mn)^2$ no denominador. Então p divide $(2mn)^2$, logo p divide m ou divide n. Mas, p divide $(m + n)$, o que implica p é um fator comum de m e n: contradição! Uma contradição semelhante acontece, para garantir que qualquer fator primo ímpar de $(m-n)$ não pode dividir o denominador [17].

Em seguida, se um primo $p > 2$ divide m no numerador e $\pm(m^2-n^2)^2 \pm (2mn)^2$ no denominador, então m divide n^4 implicando que p divide m e n: contradição! Uma contradição semelhante pode ser usada para mostrar que qualquer fator primo ímpar de $(m-n)$ não pode dividir o denominador. Concluímos que o numerador e o denominador não têm fatores comuns.

A partir desses valores de $\operatorname{tg} 2\theta$, o numerador e denominador (possivelmente, vezes um múltiplo comum) correspondem diretamente às medidas dos catetos para o triângulo exterior BAC e a hipotenusa é dada por

$$\{[4mn(m^2-n^2)]^2 + [(m^2-n^2)^2]^2\}^{\frac{1}{2}} = (m^2+n^2)^2.$$

Portanto, as medidas, em módulo, do triângulo maior BAC, correspondem ao seguinte triplo pitagórico:

$$(k[4mn(m^2-n^2)], k[(m^2-n^2)^2-(2mn)^2], k(m^2+n^2)^2)$$

Temos o interessante fato de que a hipotenusa do triângulo maior é sempre um múltiplo de um quadrado perfeito.

Como um cateto do triângulo menor BIQ é o inraio, ele é dado por

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{k[4mn(m^2-n^2)-8(mn)^2]}{2} = 2kmn(m^2-n^2-2mn)$$

Assim, as três medidas, em módulo, do triângulo menor BIQ são:

$$(\mathrm{k}(\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2)(\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 - 2\mathrm{mn}), 2\mathrm{kmn}(\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 - 2\mathrm{mn}), \mathrm{k}(\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2)(\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 - 2\mathrm{mn}))$$

A Figura 15 ilustra o caso geral.

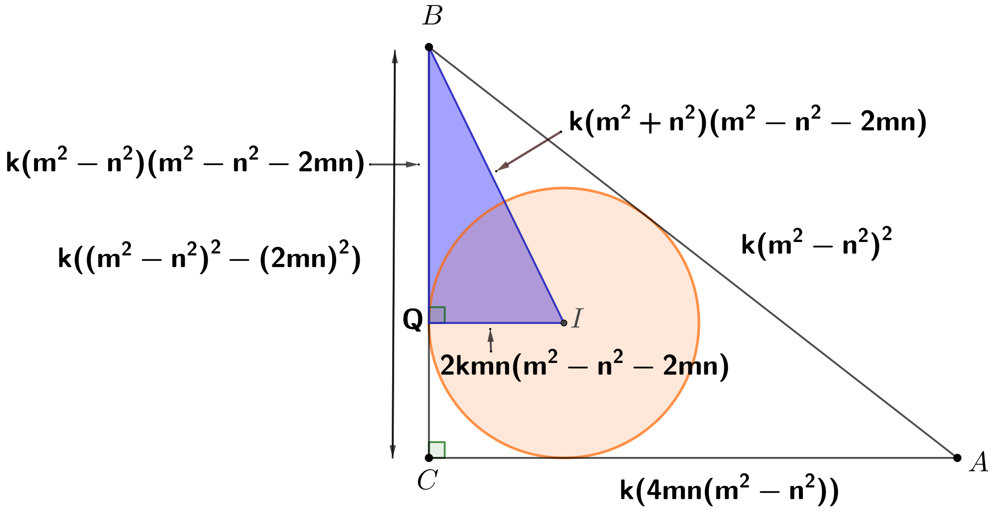

Figura 15: Caso geral de triângulos pitagóricos unidos por um incentro.

A Figura 15, acima, corresponde a $\mathrm{m} = 2, \mathrm{n} = 1, \mathrm{k} = 1$, enquanto a Figura 14 corresponde a $\mathrm{m} = 3, \mathrm{n} = 2, \mathrm{k} = 1$. A próxima construção mais simples seria $\mathrm{m} = 4, \mathrm{n} = 1, \mathrm{k} = 1$, conduzindo ao triplo $(56, 105, 119)$ para o triângulo menor e ao triplo $(161, 240, 289)$ para o triângulo maior, como ilustra a Figura 16.

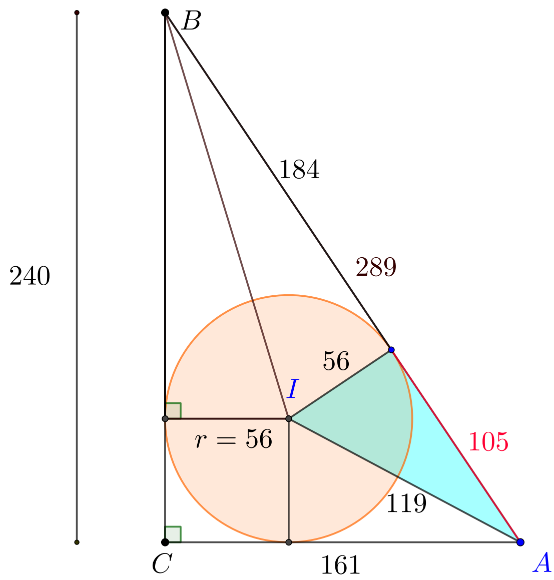

Figura 16: Caso particular de triângulos pitagóricos $(161, 240, 289)$ e $(56, 105, 119)$.

Conforme expusemos nas considerações iniciais, os cinco itens discutidos nesta seção procuram provocar uma reflexão sobre a necessidade de se buscar conteúdos em termos de Escola Básica que permitam uma interação entre a Aritmética, Álgebra e Geometria. E mais exploração do conteúdo do Conjunto dos Números Inteiros em todos os anos dos ensinos fundamental e médio.

4. Conclusão

De acordo com [18, p. 229], "As tarefas com teoria elementar dos números são uma área rica e acessível para aprimorar e sondar o sentido de criação matemática dos alunos". Por essa razão, a utilidade da Aritmética tem sido colocada como um argumento para o ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, para os alunos, a utilidade adicional no contato com conteúdos que envolvam o conjunto dos números inteiros reside no desenvolvimento da apreciação da beleza e do poder da Matemática. O poder e a utilidade no contato com a Teoria dos Números está em desenvolver a habilidade de "trabalhar como um matemático" – conjeturar e testar conjecturas.

O conjunto dos números inteiros positivos é bastante familiar e os problemas são de fácil compreensão (não implicando fácil solução). Usando esse conjunto familiar, o professor, por meio de um processo correto de orientação nas descobertas, pode instigar o genuíno benefício de aprender a pensar de forma independente. Ele deve instruir seus alunos a depender de seus próprios recursos, evitando a todo momento dar as soluções. Incentivar a descobrir que eles têm dentro de si o poder de criar ideias verdadeiramente importantes. Estes são benefícios da prática matemática que se estendem muito além da sala de aula, pois possibilita ao aluno desenvolver uma atitude de questionar e querer aprender respostas ativamente. Não se pode negar que é uma coisa boa em cada empreendimento humano, não apenas na resolução de problemas matemáticos.

Acreditamos que o desenvolvimento do pensamento matemático também se dá através das conexões feitas entre suas mais diversas áreas. Argumentos fracos e incompletos que defendem que a construção do conhecimento matemático só acontece se existir uma aplicabilidade imediata no cotidiano do aluno (empobrecimento da disciplina e utilitarismo pontual) ou através de uma significação dos conteúdos não se sustentam para os que entendem a essência do fazer matemático. É o mesmo tipo de ingenuidade ao se perguntar a um jovem por que ele gosta de jogar video game, se aquilo parece não ter nenhuma utilidade prática para ele...

A falta de motivação para a aprendizagem matemática dá-se pela falta de empatia com as heurísticas. O conhecimento matemático, quando construído através de belos desafios, como uma forma de arte, como um tipo de diversão, dando liberdade para os erros e sempre com respeito, fará todo o sentido para o estudante. Assim como faz ouvir uma música, assistir a um filme, ver a chuva, ler um poema ou ter a curiosidade de saber como os números se relacionam.

Referências

[1] ALTSHILLER-COURT, Nathan. *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. 2007 (2nd ed.), New York: Barnes & Noble.

[2] BURTON, D. M. *Teoria Elementar dos Números*. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

[4] CANTOR, M. *Allgemeine Deutsche Biographie*. Bd. 8. Duncker & Humblot. 1878.

[5] COXETER, H. S. M; S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*, New Mathematical Library 19, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[6] DUNHAM, W. *Journey Through Genius*, Wiley, New York, NY, 1990, pp. 118-127.

[7] LUMPKIN, Beatrice. "The egyptians and pythagorean triples". *Historia Matemathica* 7 (1980), p. 186-187.

[8] MAHONEY, M.S. *The mathematical career of Pierre de Fermat*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1994.

[9] MAOR, Eli. *The Pythagorean Theorem*, Princeton University Press, 2007: Appendix B.

[10] NOBRE, S. *Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática*. Caderno Cedes – História e Educação Matemática, Campinas: Papirus, v. 40, p. 29-35, 1996.

[11] OGILVY, C. S; ANDERSON, J. T. *Excursions in Number Theory*. New York: Dover, p. 68, 1988.

[12] O'LOUGHLIN Michael. "Half angles and the inradius of a Pythagorean triangle". *The Mathematical Gazette*, Vol. 94, N° 529 (March 2010), pp. 144-146.

[13] PARRIS, Richard. "Commensurable Triangles". *College Mathematics Journal*. 38 (5): 345–355.2007. doi:10.1080/07468342.2007.11922259. S2CID 218549375

[14] POSAMENTIER, Alfred S. *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*, Key College Publishing (Emeryville, CA), 2002.

[15] ROBSON, E. "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322". *Historia Mathematica*, 28, 167-206. 2001.

[16] ROBSON, E. "Words and pictures: New light on Plimpton 322". *The American Mathematical Monthly*, 109(2), 105-120. 2002.

[17] ROSEN, Kenneth H. *Elementary number Theory and its applications*, Addison-Wesley, 1984.

[18] SELDEN, A.; SELDEN, J. "Reflections on mathematics education research questions in elementary number theory". In Campbell, S. R. & Zazkis, R. (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 213-230). Westport, CT: Ablex Publishing. 2002. p. 229.

[19] SIERPIŃSKI, Wacaw (2003), *Pythagorean Triangles*, Dover.

Rubens Vilhena Fonseca
Universidade do Estado do Pará - Uepa
<rubens.vilhena@uepa.br>

Ana Paula Sales Brito
Graduada em Matemática
<paulasales340@gmail.com>

Gabriel Dias de Pinho
Graduado em Matemática
<gabrieldias141197@gmail.com>

Yuri Albino Marigliani
Graduado em Matemática
<yurialbinomarigliani@gmail.com>

Richard Campos Vilhena Fonseca
Graduando em Física
<richardfonseca207@gmail.com>

Recebido: 21/07/2021
Publicado: 08/08/2022