



Grupos diedrais e simetrias da circunferência: uma abordagem geométrica

Alan de Araújo Guimarães 

Francisco Thiarly Alves de Souza 

Resumo

Seja D_n o grupo diedral, ou seja, o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados. Em vários livros de Álgebra Abstrata, o grupo D_n é tratado com enfoque puramente algébrico, sendo visto como um subgrupo do grupo simétrico S_n .

Neste artigo, propomos uma abordagem menos comum do grupo D_n : iremos estudá-lo do ponto de vista geométrico, interpretando-o como um subgrupo do grupo de isometrias do plano que fixam um polígono regular. Provaremos que as únicas simetrias de polígonos regulares são certas rotações e reflexões, além de composições dessas. Por fim, descreveremos o grupo de simetrias da circunferência.

Os resultados aqui apresentados pretendem destacar que certos conceitos da Teoria de Grupos têm sua gênese na Geometria, e podem ser ensinados dessa forma nas disciplinas de Álgebra em nível de Graduação, favorecendo a melhor compreensão dos conceitos por parte dos estudantes.

Este trabalho é fruto da pesquisa de Iniciação Científica do segundo autor sob orientação do primeiro autor.

Palavras-chave: isometrias; polígono regular; grupo diedral.

Abstract

Let D_n be the dihedral group, i. e., the group of symmetries of a regular polygon of n sides. In several Abstract Algebra books, the group D_n is treated with a purely algebraic approach, being seen as a subgroup of the symmetric group.

In this paper, we propose a less common approach of the group D_n : we will study it from the geometric point of view, interpreting it as a subgroup of the isometry group of the plane which fixes a regular polygon. We will prove that the only symmetries of regular polygons are certain rotations and reflections, as well as their composition. Finally, we will describe the group of symmetries of the circle.

The results presented here intend to highlight that certain concepts of Group Theory have their genesis in Geometry, and can be taught in this way in Algebra subjects at the undergraduate level, favoring a better understanding of the concepts by students.

This work is the result of the Scientific Initiation research of the second author under the guidance of the first author.

Keywords: isometries; regular polygon; dihedral group.

1. Introdução

Ao estudar o conceito de grupo durante um curso de Graduação, em geral, o estudante tem um primeiro contato com a noção de isometria/simetria de subconjuntos do plano. Nesse momento, o importante grupo diedral D_n é apresentado. O grupo diedral é visto como o conjunto formado pelos movimentos que deixam, a menos da posição dos vértices, um polígono regular invariante. Comumente, na apresentação do grupo D_n , os livros de álgebra focam nos seus aspectos mais algébricos: ordem do grupo, geradores etc.

Daqui por diante, denotaremos por P_n um polígono regular de n lados.

O nosso objetivo aqui é estudar o grupo D_n de um ponto de vista mais geométrico, visualizando-o como um subgrupo do grupo de isometrias do plano que fixam um polígono regular de n lados. Com tal enfoque, teremos condições de deduzir que as únicas simetrias de um polígono regular de n lados são as rotações de ângulo $2k\pi/n$, onde $0 \leq k < n - 1$, reflexões e composições dessas. Em particular, seguirá que o grupo diedral D_n é finito (de ordem $2n$) e isomorfo a um subgrupo do grupo simétrico S_n .

Na última seção do trabalho, iremos estudar o grupo de simetrias de uma circunferência. Será visto que tal grupo é infinito e consiste de rotações em torno do centro, reflexões em torno de diâmetros e composições dessas.

Muitas vezes, em sala de aula (bem como em livros didáticos), o conceito de Grupo é apresentado de maneira muito abstrata e isolada, e isso pode se tornar um empecilho no processo de ensino e aprendizagem. Acreditamos que a abordagem apresentada neste artigo pode ser adotada em sala de aula (em cursos de Álgebra em nível de Graduação), visando enfatizar as importantes propriedades geométricas do grupo D_n , fortalecendo a compreensão dos alunos e tornando o conceito de Grupo mais natural.

Para uma boa compreensão do texto, são requeridos conhecimentos básicos da Teoria de Grupos e, também, noções de Geometria Euclidiana Plana.

2. Simetrias

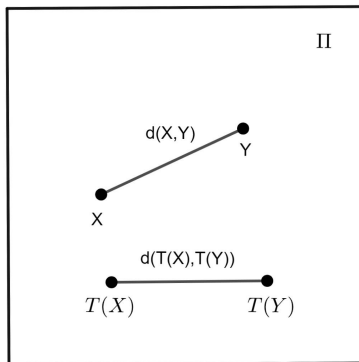
Ao longo do texto, reservaremos o símbolo Π para denotar um plano. Nesse primeiro momento, iremos definir formalmente o grupo de simetrias de um subconjunto \mathcal{F} do plano. Por vezes, iremos chamar \mathcal{F} de *figura*.

Dados os pontos $X, Y \in \Pi$, a medida do segmento XY será denotada por \overline{XY} ou por $d(X, Y)$ (distância euclidiana entre os pontos X e Y).

Definição 1. Uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é dita isometria, se

$$d(X, Y) = d(T(X), T(Y)),$$

para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$.



Definição 2. Uma isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é dita isometria de \mathcal{F} quando $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.

De acordo com a definição acima, as isometrias são funções definidas no plano que preservam distâncias.

Observação 1. As seguintes observações são de fácil verificação e podem ser vistas no Capítulo 1 de [4].

- (a) Toda isometria é injetiva.
- (b) Isometrias de retas e planos são sempre sobrejetivas.
- (c) Sejam T uma isometria de \mathcal{F} e $A \neq B$ pontos distintos em \mathcal{F} . Se $P \in \mathcal{F}$ está no segmento AB , então $T(P)$ está no segmento $T(A)T(B)$.
- (d) Consequência de (c): se T é uma isometria e r é uma reta, então $T(r)$ também será uma reta.

Quando uma isometria T de \mathcal{F} for sobrejetiva, diremos que T é uma *simetria* da figura \mathcal{F} . Denotamos o conjunto de todas as simetrias de \mathcal{F} por

$$\text{Isom}(\mathcal{F}).$$

Perceba que uma simetria de \mathcal{F} é uma função bijetora que preserva distâncias. Claramente, a função identidade sempre será uma simetria de \mathcal{F} , a qual denotaremos por $\text{Id}_{\mathcal{F}}$.

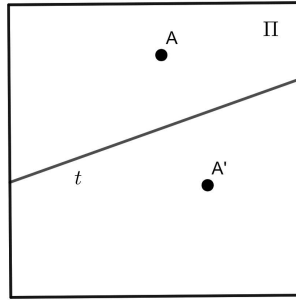
Podemos enxergar $\text{Isom}(\mathcal{F})$ como um subconjunto de $\text{Isom}(\Pi)$. Mais geralmente:

Proposição 1. Se $S, T \in \text{Isom}(\mathcal{F})$, então $S \circ T, T^{-1} \in \text{Isom}(\mathcal{F})$. Consequentemente, $(\text{Isom}(\mathcal{F}), \circ)$ é um subgrupo do grupo $(\text{Isom}(\Pi), \circ)$.

Exemplo 1. Sejam t uma reta do plano Π e B um ponto fora de t e seja B' o simétrico de B em relação a t . A função $R_t : \Pi \rightarrow \Pi$, definida por

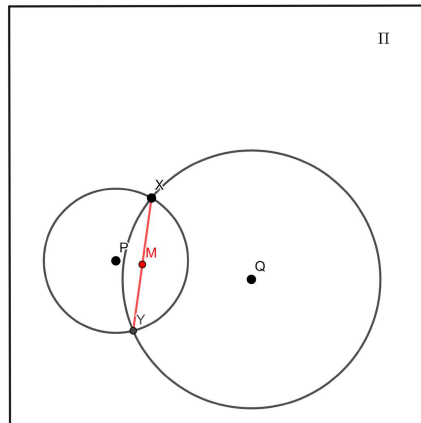
$$R_t(A) = \begin{cases} A, & \text{se } A \in t \\ A', & \text{se } A \notin t \end{cases},$$

é uma isometria do plano Π , chamada de reflexão em torno da reta t , e está ilustrada na figura abaixo.



Lema 1. *Seja $T \in \text{Isom}(\mathcal{F})$ e suponha que T fixa dois pontos distintos, digamos P e Q . Sendo R a reflexão em torno da reta determinada por P e Q , tem-se $T(X) \in \{X, R(X)\}$, para todo ponto X de \mathcal{F} .*

Demonstração. Seja X um ponto qualquer da figura \mathcal{F} . Como P e Q são fixados por T , então $T(X)$ deve pertencer à circunferência de centro em P que passa por X , e de centro em Q e que passa por X . Caso a interseção das duas circunferências seja o conjunto unitário, segue que $T(X) = X$, e o resultado está provado. Suponhamos então que exista mais um ponto na interseção, digamos Y , e seja M o ponto médio do segmento XY , conforme ilustrado na figura seguinte.



Observando que o segmento XY é corda comum às duas circunferências, concluímos que PM e MQ

são perpendiculares a XY . Concluímos então que M está no segmento PQ e que XY e PQ são perpendiculares. Assim, segue que $Y = R(X)$. \square

Corolário 1. Se $T \in \text{Isom}(\mathcal{F})$ fixa três pontos não colineares, então $T = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

Demonstração. Suponha que os pontos não colineares P_1, P_2 e P_3 sejam fixados por T e denotemos por r a reta determinada por P_1 e P_2 e por t a reta determinada por P_2 e P_3 .

Sendo X um ponto qualquer da figura \mathcal{F} , do Lema 1, obtemos

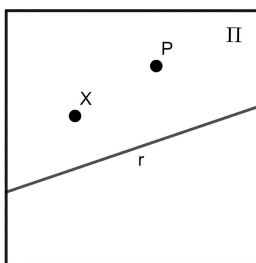
$$T(X) \in \{X, R_r(X)\} \text{ e } T(X) \in \{X, R_t(X)\}.$$

Como as retas r e t são distintas, é claro que $R_r(X) \neq R_t(X)$ e daí $T(X) = X$. \square

3. Simetrias de polígonos regulares: grupos diedrais

A Definição 2 fornece-nos uma nova possibilidade de melhor compreender o grupo diedral de um polígono regular de n lados, precisamente: podemos vê-lo como um subgrupo das isometrias do plano que fixam o polígono. Será essa a nossa abordagem daqui por diante.

Dada uma reta r e um ponto P fora de r , seja X um ponto qualquer do semiplano determinado por r e P . Se $T \in \text{Isom}(\Pi)$, sejam $r_1 = T(r)$, $P_1 = T(P)$ e $X_1 = T(X)$.



Com essas notações em mente, temos o seguinte resultado:

Proposição 2. O ponto X_1 está no semiplano determinado por r_1 e P_1 .

Demonstração. Por contradição, suponha que X_1 e P_1 estejam em semiplanos distintos determinados por r_1 . Assim, o segmento X_1P_1 intersecta a reta r_1 , digamos num ponto A_1 . Sendo A o ponto de r tal que $T(A) = A_1$, decorre que A está compreendido no segmento XP , o que é contraditório. \square

Daqui por diante, iremos denotar um polígono regular de n lados por P_n .

Definição 3. O grupo $\text{Isom}(P_n)$ será chamado de grupo diedral, e será denotado por D_n .

Agora, apresentamos a seguinte caracterização para o grupo D_n :

Proposição 3. *Seja $T \in D_n$. Se V é um vértice de P_n , então $T(V)$ também é vértice P_n . Consequentemente, o grupo D_n é isomorfo a um subgrupo do grupo simétrico S_n .*

Demonstração. Seja W um vértice do polígono tal que V e W formam um lado do polígono. Assim, o polígono fica em um dos semiplanos determinados pela reta que contém o segmento VW . Supondo que $T(V)$ não seja vértice de P_n , decorre que $T(W)$ não estaria no mesmo lado que $T(V)$. Assim, a reta que passa pelos pontos $T(V)$ e $T(W)$ determina dois semiplanos que contêm pontos de P_n , o que contradiz a Proposição 2. \square

Corolário 2. *Se $T \in D_n$, então o centro de P_n é fixado por T .*

Demonstração. Sejam O o centro de P_n e $C(V_i)$ a circunferência centrada no vértice V_i e que passa por O , para cada $i = 1, \dots, n$. Observemos que

$$C(V_1) \cap \dots \cap C(V_n) = \{O\}.$$

De acordo com a Proposição 3, os vértices de P_n são permutados, logo

$$C(T(V_1)) \cap \dots \cap C(T(V_n)) = C(V_1) \cap \dots \cap C(V_n) = \{O\}.$$

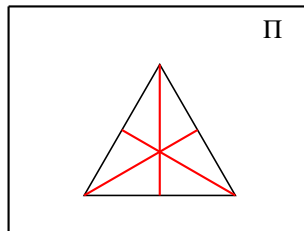
Por outro lado, como T preserva distâncias, concluímos que $T(O)$ pertence à interseção supracitada. Assim, $T(O) = O$. \square

Observação 2. Como consequência da Proposição 3, segue-se que as únicas simetrias do tipo rotação de um polígono P_n são $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, onde θ_k denota a rotação em torno do centro de P_n de ângulo $2k\pi/n$ (que convencionaremos serem no sentido anti-horário).

Observação 3. Para enxergarmos mais simetrias de P_n , precisaremos considerar os seguintes casos:

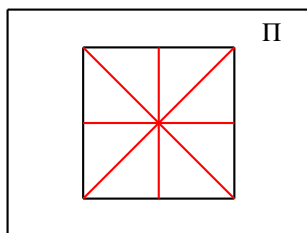
- (a) n ímpar: Nesse caso, considere as n medianas que partem de cada vértice de P_n e sejam R_1, \dots, R_n as reflexões em torno delas.

Abaixo, temos uma ilustração do caso $n = 3$:



- (b) n par: Nesse caso, considere as $n/2$ diagonais e as $n/2$ mediatrizes do polígono e sejam $R_1, \dots, R_{n/2}$ e $U_1, \dots, U_{n/2}$ as reflexões em torno das diagonais e mediatrizes, respectivamente.

Abaixo, temos uma ilustração do caso $n = 4$:



Agora, temos todas as informações necessárias para enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 1. *Seja $T \in D_n$ um elemento do grupo diedral.*

- Se n for ímpar, então T pertence ao conjunto

$$\{R_t \circ \theta_k \mid 0 \leq k \leq n-1; 1 \leq t \leq n\}.$$

- Se n for par, então T pertence ao conjunto

$$\{R_t \circ \theta_k \mid 0 \leq k \leq n-1; 1 \leq t \leq n/2\} \cup \{U_t \circ \theta_k \mid 0 \leq k \leq n-1; 1 \leq t \leq n/2\}.$$

Consequentemente, a ordem do grupo D_n é menor ou igual a n^2 .

Demonstração. Faremos somente a demonstração do caso n ímpar, já que o caso n par segue a mesma ideia.

Sejam V um vértice de P_n e O o seu centro. Consideremos R a reflexão do plano em torno da reta determinada por V e O (que é a mediana que parte do vértice V).

Do Corolário 2, sabemos que T fixa O . Logo, se T fixa V , então T terá V e O como pontos fixos. Pelo Lema 1, temos $T(X) \in \{X, R(X)\}$. Se existir X não colinear a V e O que seja fixado, o Corolário 1 garante que $T = \text{Id} = \theta_0$. Caso contrário, podemos inferir que $T = R$.

Suponhamos então que $V \neq T(V) = V'$. Consideremos a rotação θ_k^{-1} do plano em torno de O tal que $\theta^{-1}(V') = V$.

Assim, decorre que

$$T \circ \theta_k^{-1}(O) = O$$

e

$$T \circ \theta_k^{-1}(V') = V'.$$

Dessa forma, pelo Lema 3, há as seguintes possibilidades:

$$T \circ \theta_k^{-1} = \text{Id}$$

ou

$$T \circ \theta_k^{-1} = \hat{R},$$

onde \hat{R} é a reflexão em torno da mediana que passa por V' e O .

Portanto, das últimas igualdades, obtemos a primeira parte do resultado. A última afirmação do resultado segue trivialmente. \square

Na verdade, no que se refere à ordem do grupo diedral, podemos refinar o resultado anterior:

Teorema 2. *O grupo diedral D_n tem ordem $2n$.*

Demonstração. Aqui, podemos usar exatamente a mesma ideia da referência [3]. □

Uma pergunta interessante e que vai na contramão do resultado acima é se todo subgrupo finito do grupo $\text{Isom}(\Pi)$ coincide com D_n , para algum polígono regular P_n . O teorema seguinte elucidará tal questão.

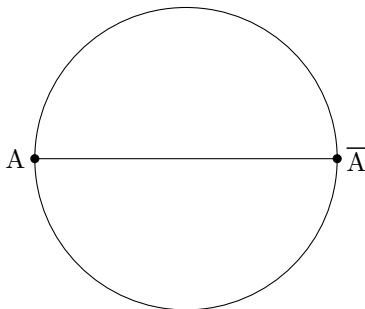
Teorema 3. *Todo subgrupo finito do grupo $\text{Isom}(\Pi)$ é isomorfo a D_n ou \mathbb{Z}_n , para algum n .*

Demonstração. Pode ser vista na página 115 da referência [2]. □

4. Subgrupos infinitos de $\text{Isom}(\Pi)$: simetrias da circunferência

Agora, nos propomos a estudar o grupo de simetrias da circunferência. Provaremos que esse grupo é infinito, sendo formado somente por rotações, reflexões em torno de diâmetros e composições dessas.

Iremos denotar uma circunferência pelo símbolo C e, sendo A um ponto de C , designaremos por \bar{A} o ponto de C que é diametralmente oposto ao ponto A .



Definição 4. Dizemos que $f \in \text{Isom}(C)$ é uma reflexão de diâmetro $A\bar{A}$ se os únicos pontos de C fixados por f são A e \bar{A} .

Exemplo 2. As seguintes funções são simetrias de C .

- (a) Rotações de ângulo qualquer em torno do centro de C .
- (b) Reflexões em torno de diâmetros de C .
- (c) Composições das simetrias indicadas em (a) e (b).

Proposição 4. *Se $f \in \text{Isom}(C)$ fixa dois pontos não diametralmente opostos, então $f = \text{Id}_C$.*

Demonstração. Sejam P e Q pontos de C que são fixados por f e suponha que $Q \neq \bar{P}$. Observe que

$$d(P, \bar{P}) = d(P, f(\bar{P})),$$

logo $Pf(\bar{P})$ é diâmetro da circunferência, implicando que $f(\bar{P}) = \bar{P}$. Assim, f fixa três pontos não colineares, e, pelo Corolário 1, obtemos $f = \text{Id}_C$. □

Como um corolário, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3. *Suponha que $f \in \text{Isom}(C)$ tem pelo menos um ponto fixo em C . Então f é uma reflexão ou f é a identidade.*

Demonstração. Seja P um ponto fixo de f . Pelo visto acima, devemos ter que \bar{P} também será ponto fixo. Se esses são os únicos pontos fixos de f , temos uma reflexão de diâmetro $P\bar{P}$. Caso exista outro ponto fixo, a Proposição 4 implica que f é a identidade. \square

Agora, estamos em condições de provar o principal resultado dessa seção.

Teorema 4. *Toda simetria de uma circunferência C é uma rotação, ou uma reflexão em torno de algum diâmetro ou é composição dessas.*

Demonstração. Seja f uma simetria de C . Fixemos um ponto $P \in C$ e consideremos a rotação θ^{-1} tal que

$$\theta^{-1}(f(P)) = P.$$

Segue do Corolário 3 que $\theta^{-1} \circ f$ é a identidade ou $\theta^{-1} \circ f$ é uma reflexão em torno de algum diâmetro, e daí o resultado segue. \square

5. Considerações finais

Normalmente estudado num primeiro curso de Álgebra Abstrata em nível de Graduação, o grupo diedral é, quase sempre, apresentado aos alunos de forma bastante algébrica, em detrimento de sua importante natureza geométrica. Tal abordagem também é perceptível em boa parte dos livros didáticos. Não obstante, acreditamos que uma abordagem mais geométrica do grupo D_n em sala de aula favorece e amplia a compreensão dos alunos, e torna o conceito de Grupo mais natural. Foi essa a principal motivação para a elaboração do presente artigo, o qual é resultado da pesquisa de Iniciação Científica do segundo autor, tendo orientação do primeiro autor.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao revisor pelas sugestões que melhoraram sobremaneira a versão final do artigo.

Referências

- [1] Barbosa, J.L.M, *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, décima edição, 2006.
- [2] Fraleigh, J.B, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison Wesley, sétima edição, 2003.
- [3] Garcia, A, *Elementos de Álgebra*, IMPA, quinta edição, 2008.
- [4] Lima, E. L, *Isometrias*, Sociedade Brasileira de Matemática, segunda edição, 2007.

Alan de Araújo Guimarães
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Matemática
Natal-RN
<alan.guimaraes@ufrn.br>

Francisco Thiarly Alves de Souza
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Física
Natal-RN
<thiarly.souza.123@ufrn.edu.br>

Recebido: 04/04/2022
Publicado: 12/08/2022