


Um estudo sobre as equações do segundo grau e suas concepções no Exame Nacional do Ensino Médio

José Edmilson Melo da Silva 

Aldo Trajano Lourêdo ¹ 

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na educação básica a partir de suas diferentes concepções. Assim, nosso trabalho justifica-se na importância investigarem-se os processos de ensino e aprendizagem desse ente matemático tão importante, a fim de encontrar subsídios para o aprimoramento da prática pedagógica. Para tanto, selecionamos as provas das últimas 10 edições do Exame Nacional do Ensino Médio e sondamos, dentro das questões da área de Matemática e suas tecnologias, apenas as que tratavam do nosso objeto de estudo. Assim, procedemos uma análise minuciosa de cada questão selecionada, classificando-as quanto a pertinência a essas concepções. Por fim, discutimos algumas considerações a respeito desses resultados e sua relevância no contexto do ensino de matemática na educação básica, relacionando-os com os resultados de outras pesquisas na área.

Palavras-chave: Concepções; Ensino; Equação.

Abstract

The objective of this work is to investigate how the notion of high school equation is conceived in basic education from its different conceptions. Thus, our work is justified by the importance of investigating the teaching and learning processes of this very important mathematical entity, in order to find subsidies for the improvement of pedagogical practice. To do so, we selected the tests from the last 10 editions of the National High School Exam and probed, within the questions of the area of Mathematics and its technologies, only those that dealt with our object of study. Thus, we carried out a thorough analysis of each selected question, classifying them in terms of their relevance to these conceptions. Finally, we discuss some considerations about these results and their relevance in the context of teaching mathematics in basic education, relating them to the results of other research in the area.

Keywords: Conceptions; Teaching; Equation.

1. Introdução

Este artigo foi adaptado da dissertação de mestrado do Profmat/UEPB de Silva [17], na qual foi feita uma abordagem mais detalhada do tema aqui tratado.

¹Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga n° 3024/2021.

A matemática é, sem dúvidas, uma das mais importantes áreas do conhecimento científico, tendo aplicações em inúmeras ciências, no cotidiano e no desenvolvimento tecnológico. Apesar disso, é também considerada um dos componentes curriculares mais complicados, por parte dos estudantes. Nessa perspectiva, muitas pesquisas têm mostrado que grande parte dos problemas associados ao ensino e à aprendizagem da matemática emergem quando se introduzem conceitos algébricos, como equações e funções. Desse modo, nossa pesquisa surgiu com o propósito de buscar respostas para um questionamento muito pertinente à prática docente do professor de matemática, que envolve o desafio de compreender e poder intervir sobre os problemas e dificuldades de ensino e de aprendizagem do conceito de equação, em especial da equação do segundo grau. Dessa forma, nossa pesquisa tem o objetivo de investigar como a noção de equação do segundo grau é concebida na Educação Básica a partir de suas diferentes concepções. Para tanto, precisamos fragmentar nosso objetivo principal nos seguintes objetivos mais específicos:

- Compreender os aspectos epistemológicos das equações a partir da História da Matemática;
- Analisar a noção de equação do segundo grau sob a ótica da matemática através das principais técnicas de resolução adotadas no ensino básico, explorando sua relação com a função quadrática;
- Investigar as tendências no ensino das equações na perspectiva da Educação Matemática, promovendo um diálogo entre pesquisas já desenvolvidas;
- Caracterizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação e sua pertinência para tal pesquisa;
- Sondar, identificar, categorizar e discutir as diferentes concepções da noção de equação na Educação Básica a partir de uma análise do Exame Nacional do Ensino Médio.

Desse modo, esta pesquisa justifica-se na iminente importância de tal ente matemático e de seus processos de ensino e aprendizagem, que devem se dar de modo a formar indivíduos autônomos e críticos, com habilidades para aplicar tais conhecimentos não só no campo teórico, mas também na prática de suas atividades cotidianas. Assim, a fim de melhor apresentar nosso trabalho, o organizamos em algumas seções, que vão desde os estudos preliminares, que fundamentaram teoricamente nossa pesquisa, até os resultados de uma investigação ancorada no Exame Nacional do Ensino Médio, à luz de um perfil conceitual de equação.

Assim, após apresentar os elementos introdutórios de nossa pesquisa nessa Seção 1, nosso artigo está organizado do seguinte modo: na Seção 2 deste material destacamos como as equações eram concebidas no decorrer da história da matemática, a partir do relato das principais contribuições dos babilônios, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus. Já num segundo momento, na Seção 3, tratamos dos principais métodos de resolução de equações do segundo grau a partir de uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos.

Em seguida, discutimos brevemente, na Seção 4, como a noção de equação é compreendida na perspectiva da Educação Matemática, na qual apresentamos um perfil conceitual proposto por Ribeiro [13], composto por cinco diferentes concepções, e que utilizamos em nossa pesquisa com o Enem. Por fim, na Seção 5 deste trabalho, apresentamos e discutimos os resultados de uma pesquisa que investigou as concepções de equação do segundo grau nas últimas 10 edições do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e finalizamos, na Seção 6, com algumas considerações acerca dos resultados obtidos e suas implicações.

2. As Equações na História da Matemática

Apesar de ser concebida atualmente em um campo algébrico bem desenvolvido, abstrato e rico em simbologia própria, não era assim que as equações eram compreendidas e estudadas nos primór-

dios da humanidade. Nesse contexto, vamos nos debruçar em uma breve passagem por algumas civilizações que foram marcantes no desenvolvimento desse ente matemático, e entender o passo a passo de como tal conceito surgiu e foi moldado até a forma como é estudado nos dias atuais.

Para começar, contemplamos um estudo sobre a civilização babilônica, que inclui um conjunto de povos que viveram entre 3500 a.C. até os primeiros séculos da era cristã na região da antiga Mesopotâmia. Seus registros escritos foram deixados em tábuas de argila, que contemplavam conceitos matemáticos relacionados com as suas atividades comerciais, econômicas e agrícolas. No que diz respeito às equações, eles as utilizavam principalmente em situações geométricas, muitas vezes como fórmulas aplicadas a seus problemas, o que os caracterizavam por uma geometria algébrica bem desenvolvida para a época.

Segundo Eves ([7], p. 61-62), na cultura babilônica “não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)”. Além disso, resolviam seus problemas comumente enunciando o passo a passo de processos para a obtenção de alguma solução particular positiva, que solucionasse determinado problema.

Seguindo um pouco mais a diante na história, identificamos que os egípcios antigos, famosos por suas grandiosas pirâmides, também desenvolveram a matemática como ferramenta para suas atividades cotidianas, abordando-as em problemas envolvendo pão, cerveja, balanceamento de rações, armazenamento de alimentos e na engenharia de suas construções, como apontam Ribeiro e Cury ([12], p. 30) e Eves ([7], p. 73). De forma similar aos babilônios, os egípcios também não dispunham de uma álgebra abstrata e costumavam registrar a resolução de suas equações por extenso, enunciando o passo a passo para a obtenção de suas soluções.

Para resolver as equações, os egípcios utilizavam-se de artifícios aritméticos, como o método da “falsa posição”, por exemplo. De acordo com Eves ([7], p. 73), suas atividades algébricas envolviam a resolução de equações lineares e equações do segundo grau bem simples, embora, por outro lado, alguns de seus escritos apontem para o desenvolvimento de uma simbologia abstrata, uma vez que foram evidenciados, em alguns de seus papiros, símbolos para sinais matemáticos e para as incógnitas.

Com feitos marcantes para o desenvolvimento científico da matemática e sua perpetuação para as futuras gerações, os gregos antigos foram a fundo no estudo dessa ciência. Suas principais atividades matemáticas faziam-se presentes no campo da geometria, onde eles eram muito fortes. Essa geometria avançada, de caráter demonstrativo, surge com Tales de Mileto (por volta de 640 a.C. a 564 a.C.), homem rico e considerado “um dos sete sábios da Grécia antiga”. Na perspectiva dos gregos, a matemática intuitiva desenvolvida pelos babilônios e egípcios não era muito agradável e, por sua vez, eles estimularam a necessidade de demonstrações e justificativas lógicas na resolução de problemas matemáticos, inclusive quando tratavam de equações. (GARBI, [8], p. 21).

Nesse contexto, diversos trabalhos, com destaque para os *Elementos* de Euclides, passam a apresentar demonstrações, validando matematicamente várias propriedades e técnicas antes utilizadas sem uma devida validação. Os gregos desenvolveram estudos sobre diversos tipos de equações, assim como as civilizações discutidas anteriormente, trabalhando com equações lineares, quadráticas, dentre outras, porém, com um caráter mais abstrato.

Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 d.C., é considerado até hoje o maior algebrista grego. Para Ribeiro e Cury [12], ele contribuiu significativamente para o desenvolvimento da álgebra, uma vez que propiciou o aperfeiçoamento da simbologia e da linguagem escrita da matemática

algébrica, desenvolveu, em seu trabalho *Arithmética*, uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números e apresentou um significativo estudo de um tipo bem particular de equações, cujo nome é dado em sua homenagem, as equações diofantinas.

Por sua vez, os hindus destacaram-se na matemática como calculistas habilidosos, seus principais trabalhos datam do Século II d.C. Na resolução de equações comumente recorriam a métodos aritméticos, como a regra da “falsa posição” e o método da “inversão”. Seus trabalhos com equação do segundo grau são mais evidenciados em situações geométricas, utilizando-as, muitas vezes, como fórmulas.

De acordo com Silva ([16], p. 22), o matemático Bháskara (1114 – 1185) deu grandes contribuições para as pesquisas com equações, já que, em seu trabalho *Lilavati*, ele “abordava diversos conteúdos da matemática, entre as quais equações lineares e quadráticas”. A partir desse e de outros estudos, os hindus foram responsáveis por ampliar o estudo das soluções de uma equação do segundo grau, passando a considerar a solução negativa. Além disso, demonstraram não estar preocupados apenas em encontrar uma solução particular qualquer para a equação, na verdade, os hindus costumavam empenhar-se em encontrar todas as possíveis soluções da mesma, o que passou a representar um grande avanço no estudo das equações algébricas.

Esses conhecimentos hindus, assim como os que foram deixados pelos gregos antigos, foram adquiridos pelos árabes que, por sua vez, traduziram muitos desses trabalhos e foram cruciais na disseminação da matemática pela Europa. Além disso, como destaca Silva [15], os árabes também deram significativas contribuições a esses trabalhos, discutindo equações lineares, de segundo grau e cúbicas, principalmente através de artifícios aritméticos ou geométricos. Assim como os hindus, eles também tiveram a preocupação em explorar não apenas alguma solução particular de uma equação, já que, segundo Ribeiro e Cury ([12], p. 33), nos trabalhos de al-Khwarizmi, as equações poderiam ser reduzidas a seis tipos, “uma preocupação constante em buscar formas canônicas que possibilitassem resolver qualquer tipo de equação quadrática.”

Munidos do sistema de numeração hindu-arábico e de conhecimentos e técnicas desenvolvidas e disseminadas pelos demais povos que citamos, os europeus foram responsáveis por uma verdadeira revolução na matemática e, conseqüentemente, no campo de estudo das equações algébricas. Isso porque os estudos de equações deixavam de ser ancorados na resolução de problemas cotidianos e a álgebra ganhava cada vez mais simbologia e notação própria, tornando-se ainda mais abstrata. Nessa perspectiva, apesar de diversos estudos sobre as equações polinomiais, inclusive de graus 3, 4 e 5, as pesquisas que se desenvolvem passam a explorar as equações não apenas a partir de suas soluções, mas na busca por generalizações, métodos sofisticados, propriedades e estudo de suas estruturas.

A partir daí, foram desenvolvendo-se estudos sobre funções, estudando-se suas propriedades, representações, estudo de seus coeficientes. Segundo Garbi ([9], p. 69-70), “Fermat havia desenvolvido uma técnica de associar equações a linhas geométricas para estudá-las, como se faz modernamente em Geometria Analítica”. Assim, a álgebra propiciou o desenvolvimento de teorias bastante abstratas, envolvendo os variados campos da matemática, como a Teoria das Equações Algébricas, o Cálculo Diferencial e Integral, a Teoria dos Grupos, dentre outras. Essas, caracterizam de forma clara o interesse dos matemáticos da época pelo estudo das propriedades estruturais dos entes matemáticos, como destaca Silva [17].

3. A Equação do Segundo Grau no Livro Didático

Com o intuito de compreender mais a fundo como o conceito de equação do segundo grau vem sendo tratado, realizamos a seleção de duas coleções de livros didáticos, uma do Ensino Fundamental II e outra do Ensino Médio, para investigar como os mesmos abordavam tal conceito no que diz respeito aos principais métodos de resolução abordados.

Para a seleção das coleções foram estabelecidos os seguintes critérios:

Ter sido aprovada no PNLD 2017 (Ensino Fundamental II) e no PNLD 2018 (Ensino Médio); Ter sido adotada na rede pública municipal (Ensino Fundamental II) e na estadual (Ensino Médio) do município de São Joaquim do Monte - PE nos últimos três anos.

Durante a seleção dos livros do Ensino Fundamental II, verificamos que as coleções aprovadas no PNLD 2017 foram: *Praticando Matemática*, *Descobrimo e Aplicando a Matemática*, *Matemática do Cotidiano*, *Matemática - Compreensão e Prática*, *Projeto Teláris - Matemática*, *Projeto Araribá - Matemática*, *Matemática - Ideias e Desafios*, *Matemática - Bianchini*, *Matemática nos Dias de Hoje - Na Medida Certa*, *Convergências - Matemática e Vontade de Saber*. Após uma consulta a Secretaria Municipal de Educação, a coleção *Praticando Matemática* (ANDRINI; VASCONCELOS, [1]) foi identificada como sendo adotada unanimemente na rede municipal de São Joaquim do Monte e, assim, foi selecionada para a nossa pesquisa.

Com relação ao Ensino Médio, identificamos as coleções aprovadas no PNLD 2018: *Quadrante Matemática*, *Matemática: Interação e Tecnologia*, *Contato Matemática*, *Matemática - Paiva*, *Matemática: Ciência e Aplicações*, *Conexões com a Matemática*, *Matemática para Compreender o Mundo* e *Matemática: Contexto e Aplicações*. Para atender ao nosso segundo critério, realizamos uma consulta à Escola de Referência em Ensino Médio Frei Epifânio, responsável pelo Ensino Médio do município, constatando que a coleção adotada em sua sede e anexos era a *Quadrante Matemática* (CHAVANTE; PRESTES, [5]), a qual adotamos para nossa análise.

Assim, munidos dessas duas coleções, procedemos uma sondagem das mesmas a fim de identificar os principais métodos de resolução das equações polinomiais do segundo grau no ensino básico. A partir de nossa análise, identificamos tais métodos:

Aplicação da fórmula de Bháskara: Este método consiste em identificar os coeficientes reais a , b e c em uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e descobrir os valores reais de x que satisfazem a mesma após aplicar tais coeficientes na fórmula tradicionalmente conhecida como “fórmula de Bháskara”, que é dada por

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/2a$$

Por exemplo, para resolver a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ note que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$. Aplicando os valores dos respectivos coeficientes na fórmula acima, temos que:

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}/(2 \cdot 1) = (-2 \pm 4)/2.$$

Logo, podemos concluir que as soluções reais são $x_1 = (-2 + 4)/2 = 1$ e $x_2 = (-2 - 4)/2 = -3$.

O método de completar quadrados: Esse método consiste em tomar uma equação do segundo grau e manipular a mesma a fim de tornar o seu primeiro membro igual a um trinômio quadrado perfeito e, posteriormente, isolar o valor de x , extraíndo a raiz quadrada em ambos os membros da equação e aplicando regras operatórias básicas. Por exemplo, para determinar as raízes reais da equação $4x^2 + 5x + 1 = 0$ vamos tornar o primeiro membro dessa equação um trinômio quadrado perfeito:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5/4x) + 1/4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5/4x + 25/64) + 1/4 - 25/64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5/4x + 25/64) = 25/64 - 1/4 \Leftrightarrow (x + 5/8)^2 = 9/64.$$

Reorganizando a equação e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos que:

$$\sqrt{(x + 5/8)^2} = \pm\sqrt{(9/64)} \Leftrightarrow x + 5/8 = \pm 3/8 \Leftrightarrow x = -5/8 \pm 3/8.$$

Portanto, suas raízes reais são $x_1 = -5/8 + 3/8 = -2/8 = -1/4$ e $x_2 = -5/8 - 3/8 = -8/8 = -1$.

O método da soma e do produto: Consiste em comparar uma equação do segundo grau com a equação dada por $x^2 - Sx + P = 0$ e encontrar as soluções reais de uma equação, sabendo que sua soma é S e seu produto é P. Apesar de não ser muito trabalhado, esse método foi mais evidenciado no 9º ano, aplicado a situações triviais onde se objetivava que o educando resolvesse a equação “de cabeça”. Por exemplo, para determinar quais são as raízes reais da equação $x^2 - x - 6 = 0$, comparamos a equação do exemplo com $x^2 - Sx + P = 0$, observamos facilmente que $S = 1$ e $P = -6$. Vamos procurar dois números reais tais que sua soma resulte em 1 e seu produto em -6 . Os números procurados são -2 e 3 , que são as duas raízes reais procuradas.

Método da fatoração: Também estimulado apenas nas situações iniciais da abordagem das equações, esse método consiste em fatorar a equação do segundo grau, com segundo membro nulo, tornando-a o produto de duas expressões do primeiro grau e encontrar os valores de x igualando ambas as expressões a zero. Por exemplo, para determinar as soluções reais da equação $x^2 - 6x - 27 = 0$, temos:

$$x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0.$$

Portanto, as soluções da equação são $x_1 = 9$ e $x_2 = -3$.

Métodos para as equações incompletas: Para resolver equações do segundo grau incompletas, ou seja, com $b = 0$ e/ou $c = 0$, apesar de termos os métodos acima, podemos aplicar técnicas mais triviais e rápidas.

Para encontrar as raízes reais da equação $2x^2 - 2 = 0$, na qual nota-se que $b=0$, procedemos adicionando 2 unidades a ambos os membros e, posteriormente, multiplicando toda a equação por $1/2$, e obtemos:

$$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Portanto, temos as soluções (raízes) reais: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Já para resolver a equação $-3x^2 + 5x = 0$, na qual $c = 0$, vamos pôr x em evidência e concluir de forma similar ao método da fatoração:

$$-3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/3.$$

Logo, as soluções (raízes) reais são: $x_1 = 0$ e $x_2 = 5/3$.

Para um melhor detalhamento, sugerimos a leitura do trabalho de Silva [17], no qual são apresentadas algumas demonstrações e exemplos complementares dos métodos aqui destacados.

4. As Equações na Perspectiva da Educação Matemática

Alinhadas aos nossos objetivos, as discussões que seguem são frutos de pesquisas no campo da educação matemática, em especial para o trabalho pedagógico de conceitos algébricos, como é o caso das equações. Nesse caso, estamos nos referindo a álgebra abstrata e bem desenvolvida com linguagem e simbolismo próprio e que é introduzida nas escolas da educação básica muitas vezes de forma mecânica e descontextualizada. É exatamente a respeito disso que Ribeiro e Cury [12] destacam a importância de se pesquisar esse tema, já que:

As pesquisas (...) parecem indicar que, mesmo ao final da escolaridade básica, após vivenciarem processos de aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais, como é o caso do conceito de equação, os alunos não reconhecem as estruturas desse ente matemático, não são capazes de apresentar uma caracterização para esse conceito e somente evocam os procedimentos e técnicas de resolução. (RIBEIRO; CURY, [12], p. 18).

Ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do terceiro e quarto ciclos (BRASIL, [3]) explicam que um dos grandes problemas no trabalho com conteúdos algébricos está na insistência por se abordarem métodos de manipulação algébrica sem se desenvolver nos educandos as capacidades de abstração e generalização, que são fundamentais para uma aprendizagem sólida do conteúdo.

Com relação a isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, [4], p. 39) consideram que a aprendizagem algébrica deve ser muito mais ampla, possibilitando ao educando “modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar, representar problemas por meio de equações”, dentre outras habilidades. Destaca ainda que nos anos iniciais da escolarização deve-se desenvolver uma pré-álgebra, engajada em preparar o educando cognitivamente para o desenvolvimento de raciocínios e habilidades caracterizadores do que chamamos de “pensamento algébrico”, pois:

Consideramos que a Álgebra, trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode ser o fio condutor do currículo escolar, e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real. (RIBEIRO; CURY, [12], p 11).

Para Ponte, Branco e Matos [11] e Silva [15], a capacidade de interpretar a álgebra dentro de situações, de lidar com sua resolução vão ser partes do que podemos chamar de pensamento algébrico, que envolve muito além de práticas apenas tecnicistas e mecânicas de manipulações algébricas. Desenvolver essas competências é fundamental para que o aluno compreenda a álgebra não apenas como um jogo de manipulações mecânicas de letras e operações, já que, quando trabalhamos com uma álgebra simbólica, é importante ter em mente que “as letras não representam sempre o mesmo papel, e o estudante precisa não apenas compreender esses diferentes papéis, mas também realizar ações variadas vinculadas a esses papéis no contexto das atividades que realiza na escola.” (GOMES, [10], p. 8).

Nesse sentido, precisamos compreender as concepções conceituais que se fazem presentes na noção de equação, as quais, por sua vez, determinam as finalidades do trabalho com tal noção matemática, isso porque “as finalidades da álgebra são determinadas por ou relacionam-se com – concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.” (USISKIN, [18], p. 13, grifo do autor).

Para tanto, movido em identificar e compreender essas diferentes concepções, Ribeiro [14] desenvolveu, em sua tese de doutorado, uma série de estudos a respeito dessa noção. A princípio, ele fez um estudo histórico e, a partir de então, verificou algumas peculiaridades de cada povo no trato com as equações. Mais adiante, ele realizou um estudo didático a partir da análise de dicionários etimológicos, livros de fundamentos de matemática, artigos e livros didáticos, estabelecendo mais algumas categorias, e, assim, propôs uma classificação, conhecida como Teoria dos

Multisignificados de Equação, composta por seis significados prévios para a noção de equação. São eles: intuitivo-pragmático, dedutivo-geométrico, estrutural-generalista, estrutural-conjuntista, processual-tecnista e axiomático-postulacional.

A partir dessa categorização, algumas pesquisas foram desenvolvidas na investigação das equações no ensino básico. Dentre elas, destacamos o trabalho de Barbosa [2], que investigou, através de entrevistas semiestruturadas, os significados evocados por professores de matemática quando instigados por situações pertinentes a noção de equação. Além dele, Dorigo [6] também desenvolveu um relevante estudo, no qual se debruçou a analisar, através de uma sequência de atividades, quais significados propostos por Ribeiro [14] faziam-se presentes na concepção de um grupo de estudantes do ensino médio.

Os resultados obtidos e divulgados por eles contribuíram significativamente na Teoria dos Multisignificados de Equação. Barbosa [2] verificou que alguns significados não se fizeram presentes nas respostas dos professores pesquisados. São eles: o dedutivo-geométrico, o estrutural-conjuntista e o estrutural-generalista. Ele ainda completa destacando que os professores muitas vezes procuraram evocar procedimentos e fórmulas prontas de resolução quando submetidos a situações pertinentes a esses significados, o que demonstra um grande apego ao significado processual-tecnista. Após uma análise aprofundada, Barbosa [2] conclui que o significado axiomático-postulacional perpassa por todos os demais, não se apresentando como um significado isolado. Já os significados intuitivo-pragmático e, principalmente, o processual-tecnista foram bem evidenciados nas respostas analisadas.

Dorigo [6], por sua vez, verificou que os significados apresentados pelos estudantes analisados muitas vezes não eram coerentes com a atividade proposta, além de que comumente os mesmos nem sequer chegavam a perceber que tais atividades remetiam a ideia de equação. Em suma, os significados que foram frequentemente evocados pelos estudantes foram o processual-tecnista, como já era esperado, e o intuitivo-pragmático; isso porque os estudantes, muitas vezes sem identificar a ideia de equação, buscaram aplicar procedimentos aritméticos na resolução de suas atividades.

Assim, Ribeiro [13] faz algumas considerações importantes, acrescentando os resultados desses dois trabalhos em suas pesquisas, e apresenta uma reelaboração dos significados de equação no modelo de perfil conceitual, destacando uma categorização com cinco concepções baseadas nas anteriores, são elas:

- Pragmática: a equação é obtida e interpretada a partir de problemas práticos, podendo a mesma ser admitida como uma noção primitiva. Nesta concepção é comum o uso de raciocínios intuitivos e a busca por soluções aritméticas;
- Geométrica: a equação é deduzida e interpretada através de problemas de ordem geométrica e há uma busca por soluções que, mesmo expressas aritmética ou algebricamente, representem ou quantifiquem conceitos geométricos;
- Estrutural: a equação é concebida a partir de suas características estruturais. As soluções objetivadas em atividades com essa concepção são predominantemente algébricas, expressas, em geral, por meio de expressões algébricas, generalizações ou estudo de suas propriedades;
- Processual: a equação é interpretada através de seus processos e técnicas de resolução, normalmente exigindo apenas encontrar sua solução. As soluções obtidas nessa concepção são predominantemente expressas aritmética ou algebricamente;
- Aplicacional: nessa concepção, a equação é obtida e interpretada a partir de suas aplicações. Embora seja comum adentrar em conceitos geométricos, sua solução, em geral, é expressa aritmeticamente.

Essa categorização, apresentada na forma de perfil conceitual, categoriza as cinco concepções da noção de equação que iremos utilizar para analisar como as equações polinomiais do segundo grau fazem-se presentes no Exame Nacional do Ensino Médio.

5. As Equações do Segundo Grau no Exame Nacional do Ensino Médio

Com o intuito de compreender como as equações são concebidas no ensino básico a partir de suas concepções, resolvemos analisar como ela é tratada no Exame Nacional do Ensino Médio. Nossa justificativa parte da importância que o mesmo tem na cultura escolar brasileira, sendo a principal porta de entrada do estudante egresso do ensino básico para a universidade, seja ela pública ou até mesmo privada. Além disso, tal exame é tido por muitos professores como um norteador para o ensino, no qual suas questões servem como base para simulados e provas no ensino médio e em cursos pré-vestibulares.

5.1. Aspectos Preliminares e Metodologia

Diante da abordagem proposta, nosso estudo caracteriza-se como uma investigação quali-quantitativa, na qual pretendemos quantificar como as concepções de equação são contempladas no Exame Nacional do Ensino Médio e, ao mesmo tempo, analisar qualitativamente como esses resultados estão alinhados com outras pesquisas e quais suas implicações nos processos pedagógicos no ensino básico.

Para dar início a nossa investigação, selecionamos as provas do Enem dos últimos 10 anos, o que compreende as edições que vão de 2012 até 2021. Assim, realizamos o *download* das mesmas na versão digital (PDF) no *site* oficial do Inep, escolhendo, aleatoriamente e sem qualquer perda, a prova do tipo amarela em todas as edições a serem utilizadas. Feito isso, procedemos à coleta de dados, na qual nos concentramos apenas na investigação das questões da área de Matemática e Suas Tecnologias, realizando uma leitura, e, quando necessário, a resolução de cada questão, a fim de verificar se a mesma tratava do conceito de equação polinomial do segundo grau ou não. Desse modo, foram sondadas 450 questões do Exame Nacional do Ensino Médio, sendo 45 questões de cada uma das 10 edições.

Durante esse processo, recorreremos várias vezes a resoluções dispostas em canais abertos do YouTube, objetivando explorar variados tipos de resolução para verificar se o nosso objeto de estudo se fazia presente naquela determinada questão. Feito isso, selecionamos as questões que verificamos que trabalhavam com equações do segundo grau, para, assim, procedermos uma análise mais minuciosa, a fim de verificar qual(is) concepções de equação faziam-se presentes.

Então, montamos um quadro contemplando as questões selecionadas e detalhando sua pertinência ou não com a abordagem de cada uma das concepções investigadas. Por fim, fizemos uma breve análise estatística dos resultados e os apresentamos em um gráfico comparativo para apresentar melhor os resultados relativos de cada concepção.

5.2. Resultados e Discussões

Nossa sondagem apontou para um significativo número de questões envolvendo a noção de equação, principalmente equações do primeiro grau. Já no que diz respeito às equações do segundo grau, nosso objeto de estudo, encontramos, *a priori*, 25 questões, distribuídas dentre as 10 edições analisadas. Porém, após uma análise mais detalhada, percebemos que 6 delas faziam apenas uma

referência muito superficial a esse conceito, pois apresentavam uma equação explicitamente como um comentário à parte no enunciado, sem que houvesse necessidade de se manipular a mesma ou de ter qualquer conhecimento sobre ela para a resolução do problema, como uma possível distração para a sacada real do problema.

Por esse motivo, resolvemos excluir essas 6 questões de nossos dados coletados, considerando apenas as demais 19 questões que realmente articulavam um trabalho com equações do segundo grau. O resultado de nossa análise pode ser verificado no quadro a seguir:

Distribuição das Concepções nas Questões Analisadas

Ano	Questão	Pragmática	Geométrica	Estrutural	Processual	Aplicacional
2013	136	Não	Sim	Não	Sim	Não
2013	142	Não	Não	Não	Sim	Não
2013	145	Não	Sim	Não	Não	Sim
2013	165	Sim	Não	Não	Sim	Não
2014	163	Sim	Sim	Não	Não	Sim
2014	164	Não	Não	Sim	Não	Não
2015	136	Sim	Não	Não	Sim	Não
2015	145	Sim	Sim	Não	Não	Não
2015	157	Sim	Não	Não	Não	Não
2015	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2015	171	Não	Sim	Não	Não	Não
2016	152	Não	Sim	Não	Sim	Não
2016	166	Não	Sim	Não	Não	Não
2017	163	Não	Sim	Não	Não	Sim
2017	168	Sim	Sim	Não	Não	Não
2017	180	Não	Sim	Não	Não	Sim
2019	171	Não	Sim	Não	Não	Sim
2020	179	Não	Sim	Não	Não	Sim
2021	162	Não	Não	Não	Sim	Não
Total	19	6	13	1	6	7

Fonte: Os autores

Diante da análise realizada, verificamos que a concepção pragmática foi evidenciada em 6 das 19 questões analisadas, o que representa 31,58% das atividades que estavam trabalhando o conceito de equação do 2º grau. A seguir, temos um exemplo de questão trabalhando tal concepção.

Figura 1: Questão 157 do Enem 2015

<p>QUESTÃO 157 ◆◆◆◆◆</p> <p>Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R\$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação</p> $q = 400 - 100p,$ <p>na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.</p> <p>A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.</p>	<p>O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo</p> <ul style="list-style-type: none">A R\$ $0,50 \leq p < R\\$ 1,50$B R\$ $1,50 \leq p < R\\$ 2,50$C R\$ $2,50 \leq p < R\\$ 3,50$D R\$ $3,50 \leq p < R\\$ 4,50$E R\$ $4,50 \leq p < R\\$ 5,50$
---	--

Fonte: ENEM (2015).

Na grande maioria, essa concepção surgia em problemas de ordem prática e exigiam soluções aritméticas, como esperado. Durante a análise dessa e de algumas outras atividades, identificamos um enunciado com uma problemática cotidiana, em que a equação do grau grau é implícita, necessitando ser abstraída pelo leitor, normalmente de forma intuitiva e a solução procurada para o problema é totalmente aritmética, obtida a partir da resolução da equação formulada.

Com relação à concepção geométrica, identificamos sua presença em 13 das 19 atividades analisadas, representando 68,42% das mesmas. Ao compararmos os resultados obtidos com a pesquisa de Silva [15], que investigou as concepções de equação em uma coleção de livro didático de matemática do ensino fundamental II, verificamos que em ambas a concepção geométrica é a mais evidenciada, mostrando um grande apego ao trabalho com equações em contextos geométricos.

Esse trabalho é bastante rico, pois exige do educando relacionar conceitos e propriedades geométricas para, a partir daí, utilizar a noção de equação. Na grande maioria dos problemas, a equação do segundo grau era deduzida a partir de figuras, nas quais as soluções procuradas deviam ser expressas aritmeticamente e quantificavam medidas de segmentos, como é o caso do exemplo abaixo:

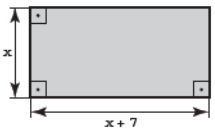
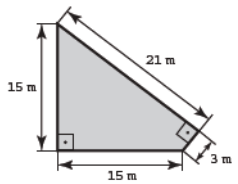
Figura 2: Questão 166 do ENEM 2016

QUESTÃO 166

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

A 7,5 e 14,5.
B 9,0 e 16,0.
C 9,3 e 16,3.
D 10,0 e 17,0.
E 13,5 e 20,5.

Fonte: Enem (2016).

Quanto à concepção estrutural, percebemos que, das 19 questões analisadas, apenas 1 delas articulava elementos característicos dessa concepção, o que representa um percentual de, aproximadamente, 5,26% do total de questões que trabalham equação do segundo grau. Nessa questão, buscou-se uma expressão que generalize a situação estabelecendo uma relação algébrica entre variáveis, caracterizando um trabalho com a concepção estrutural da noção de equação. Observe tal atividade:

Figura 3: Questão 164 do Enem 2014

QUESTÃO 164

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f , de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

A $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
B $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$
C $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$
D $y = \frac{4}{5}x + 2$
E $y = x$

Fonte: ENEM (2014).

A respeito desse tipo de questão, Ribeiro e Cury ([12], p. 88) destacam que uma atividade que “propõe que o aluno busque uma regra que defina y como função de x ” está contextualizada na própria matemática e auxilia os alunos “a desenvolverem significados mais abstratos”. Assim, o

autor conclui que este tipo de trabalho é análogo ao que foi definido na concepção estrutural.

Já a concepção processual foi contemplada, em nossa análise, em 6 atividades, o que representa 31,58% das atividades selecionadas. Observe o exemplo:

Figura 4: Questão 162 do Enem 2021

Questão 162 enem2021

Para a comunicação entre dois navios é utilizado um sistema de codificação com base em valores numéricos. Para isso, são consideradas as operações triângulo Δ e estrela $*$, definidas sobre o conjunto dos números reais por $x\Delta y = x^2 + xy - y^2$ e $x * y = xy + x$.

O navio que deseja enviar uma mensagem deve fornecer um valor de entrada b , que irá gerar um valor de saída, a ser enviado ao navio receptor, dado pela soma das duas maiores soluções da equação $(a\Delta b) * (b\Delta a) = 0$. Cada valor possível de entrada e saída representa uma mensagem diferente já conhecida pelos dois navios.

Um navio deseja enviar ao outro a mensagem "ATENÇÃO!". Para isso, deve utilizar o valor de entrada $b = 1$.

Dessa forma, o valor recebido pelo navio receptor será

A $\sqrt{5}$

B $\sqrt{3}$

C $\sqrt{1}$

D $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

E $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Fonte: ENEM (2021).

Nessas atividades era objetivada a obtenção de soluções aritméticas por meio do uso de técnicas e algoritmos mecânicos de resolução das equações. Além disso, uma característica desse tipo de concepção é que nas atividades nas quais a mesma se fez presente é que a equação já era apresentada de forma explícita. Os resultados que encontramos mostram um equilíbrio entre as concepções pragmática e processual, o que vai na mesma direção da investigação de Silva [15].

Nessa perspectiva, embora haja críticas ao trabalho mecânico na resolução das equações no ensino básico, compreendemos que o problema não reside nessa concepção, uma vez que é muito importante a aprendizagem dos algoritmos e técnicas de resolução. Na verdade, o problema ocorre quando as aulas e atividades apenas se concentram em trabalhar essa concepção exclusivamente, esquecendo as demais, o que vem a causar uma grande descontextualização da matemática e limitar as condições de desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

A concepção aplicacional, por sua vez, fez-se presente em 7 das 19 atividade analisadas, o que representa 36,84% das mesmas. Essa concepção foi identificada no trabalho com equações do segundo grau quando havia a necessidade de aplicação de fórmulas de volume, do teorema de Pitágoras e da lei dos cossenos, por exemplo, ou seja, quando a incógnita é um termo que se encontra elevado ao expoente 2 na respectiva fórmula utilizada.

Um exemplo: na grande maioria, as questões categorizadas por trabalharem a concepção aplicacional foram frutos de questões associadas a contextos geométricos, o que também foi percebido no trabalho de Silva [15], com relação as equações no livro didático. Essas questões além de trabalharem noções de geometria, ainda exigem que o educando aplique uma equação, normalmente como uma fórmula, ao problema para poder resolvê-lo.

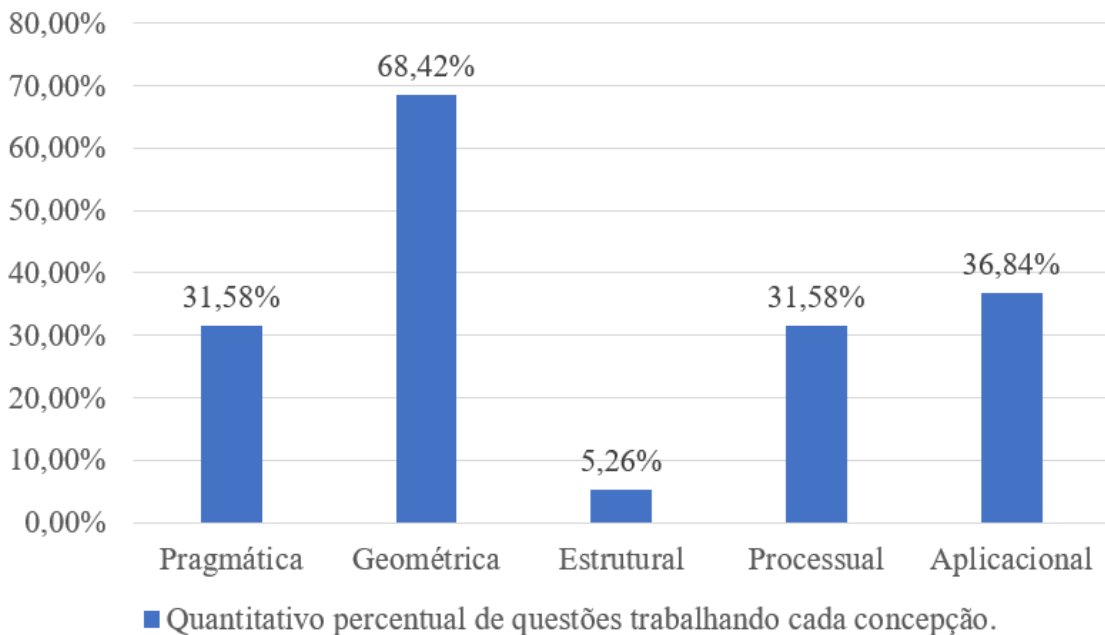
6. Considerações Finais

A partir dos estudos históricos desenvolvidos pudemos compreender os principais contextos nos quais as equações surgiam e como eram tratadas por variados povos. Compreendemos que ela nasceu da necessidade do homem em aperfeiçoar suas atividades práticas, originando-se em situações cotidianas. Com o aperfeiçoamento da álgebra, as equações passam a ser tratadas sob aspectos generalistas, sendo estudada num campo mais abstrato, no qual, muitas vezes, a equação passa a ser concebida como uma generalização ou uma fórmula, com aplicações além da matemática.

Os estudos sobre a equação do segundo grau no livro didático propiciaram-nos bagagem para conhecer e se aprofundar nos principais métodos de resolução de equações do segundo grau no ensino básico, podendo prever o que esperar da resolução dos educandos. Ao pesquisarmos no campo da educação matemática, foi possível entender um pouco dos desafios que permeiam o ensino de álgebra e a importância de se desenvolver no educando as capacidades características do pensamento algébrico desde cedo. Ainda, entendemos quais são as cinco concepções da noção de equação e como cada uma é concebida.

Subsidiados pelas pesquisas que desenvolvemos, pudemos realizar uma exploração no Exame Nacional do Ensino Médio, que mostrou como as cinco concepções de equações fizeram-se presentes nas atividades sobre equação do segundo grau nas últimas 10 edições do exame. Observe o gráfico:

Figura 5: Distribuição das concepções de equação nas questões analisadas



Fonte: O autor.

Notamos no gráfico acima que a soma dos percentuais evidenciados nas cinco concepções investigadas ultrapassa os 100%. Isso ocorre porque, como vimos no quadro 1 deste trabalho, há várias questões trabalhando paralelamente mais de uma concepção de equação.

Diante de nossa análise, no que diz respeito às questões práticas, caracterizadas pela concepção pragmática, que são contextualizadas em problemas mais cotidianos, as equações mais trabalhadas eram as de primeiro grau, sendo as do segundo grau verificadas com menor frequência, talvez porque não seja tão intuitivo abstrair uma equação desse tipo se comparada com uma equação do primeiro grau. Mesmo assim, as atividades propostas foram bem elaboradas, com enunciados ricos e que exigiam algumas abstrações não tão diretas, explorando o pensamento algébrico do leitor.

Percebemos ainda que essas equações aparecem comumente em contextos geométricos, sendo abstraídas a partir de deduções envolvendo conceitos como medidas de segmentos, áreas, volumes etc. A maioria das questões categorizadas por trabalhar a concepção geométrica eram dotadas de um enunciado problematizador, o que faz com que o educando seja instigado a mergulhar em outras concepções para compreender o problema e não apenas em ir direto para uma figura e deduzir uma relação geométrica como uma equação. Assim, muitas das questões que lidavam com a concepção geométrica também contemplavam outras concepções, em especial, a aplicacional.

O tratamento estrutural dado as equações foi o menos frequente, apontando que o mesmo não é o foco no ensino básico ou pelo menos no Enem. Embora seja muito importante na compreensão da equação enquanto ente matemático, a concepção estrutural é normalmente explorada em estudos de nível superior, quando são formalizadas definições mais rigorosas e se fazem necessárias demonstrações. Resultado similar também é apresentado na pesquisa de Silva [15], com livros didáticos, em que tal concepção aparece com a menor incidência entre as cinco concepções analisadas.

Já o trabalho mecânico, caracterizado na concepção processual, é verificado com uma razoável frequência e mesmo nos casos em que foi verificado não se tratava exclusivamente de atividades totalmente descontextualizadas. Isso evidencia uma importância dada a um trabalho mais significativo por parte do Enem. Além disso, mesmo apresentando explicitamente a equação, os problemas não se resumiam a enunciados como “resolva” ou “calcule”, mas sim apresentavam alguma problemática em seu contexto, o que é bastante enriquecedor.

No que diz respeito ao aspecto aplicacional, também identificamos um trabalho quantitativamente razoável, especialmente em situações geométricas. As principais aplicações verificadas eram de fórmulas de volume e, principalmente, do teorema de Pitágoras. Essas atividades eram contempladas em um enunciado bastante amplo, que não permitia, na maioria das vezes, uma aplicação imediata, sendo necessário articular a aplicação com raciocínios dedutivos e, por esse motivo, muitas das questões que foram categorizadas por contemplar a concepção aplicacional também trabalhavam a concepção geométrica das equações, o que caracteriza uma abordagem enriquecedora.

Em suma, consideramos que, a partir de tais estudos, conseguimos compreender os aspectos que permeiam a história, o trabalho pedagógico e matemático da noção de equação do ensino básico, bem como apresentar e discutir os resultados dessa pesquisa, ancorada no Exame Nacional do Ensino Médio, que deve contribuir para o debate sobre o ensino de equação e suas diferentes concepções na Educação Básica.

Referências

- [1] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática**. 4^a ed. renovada. Ensino Fundamental. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.
- [2] BARBOSA, Y. O. **Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [3] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1998).
- [4] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática: ensino de primeira à quarta série**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, (1997).
- [5] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Coleção Quadrante matemática**. 1^a ed. Ensino Médio. São Paulo: Edições SM, 2016.
- [6] DORIGO, M. **Investigando as concepções de equações de um grupo de alunos do ensino médio**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.
- [7] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5^a ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [8] GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 4^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [9] GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- [10] GOMES, L. M. M. **Álgebra e funções na educação básica**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- [11] PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.
- [12] RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N.; **Álgebra para a formação do professor. Explorando os conceitos de equação e de função**. 1^a ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.
- [13] RIBEIRO, A. J. **Elaborando um perfil conceitual de equações: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática**. Ciência e Educação, Bauru, v. 19, n^o 1, p. 55-71, 2013.
- [14] RIBEIRO, A. J. **Equações e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [15] SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação no livro didático de matemática**. 2017. 127 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática-Licenciatura) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.
- [16] SILVA, J. E. M. **Investigando a noção de equação: perspectivas histórico-epistemológicas, pedagógicas e análise de livro didático**. 1^a ed. Veranópolis: Diálogo Freiriano, 2020.
- [17] SILVA, J. E. M. **Perspectivas sobre a equação do segundo grau e suas concepções no ENEM**. 2022. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022.

- [18] USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** As ideias da álgebra. COXFORD, A; SHULTE, A. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995.

José Edmilson Melo da Silva
Mestre pelo Profimat/UEPB
Professor da Secretaria de Educação
e Esportes de Pernambuco
<edmilsonmelo15152121@hotmail.com>

Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba
<aldolouredo@gmail.com>

Recebido: 26/06/2022
Publicado: 10/10/2022